Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 819–823
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe

Prolongement d'un courant positif plurisousharmonique

Khalifa Dabbek

Faculté des sciences de Gabès, 6071 Gabès, Tunisie

Reçu le 15 octobre 2005 ; accepté après révision le 14 mars 2006

Disponible sur Internet le 18 avril 2006

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Le but de cette Note est de montrer un résultat de prolongement d'un courant T positif plurisousharmonique (Psh) de dimension p à travers un ensemble A fermé pluripolaire complet, sous l'hypothèse que $H_{2p}(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A) = 0$ et que dd^cT soit de masse localement finie. Pour cela, on démontre une inégalité de type Oka pour un tel courant. Ensuite on démontre un résultat de prolongement lorsque A est un ensemble analytique irréductible de dimension p, géneralisant ainsi un résultat de Siu pour un courant positif fermé et un de nos résultats antérieurs pour un courant negatif Psh. ***Pour citer cet article : K. Dabbek, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Extension of a positive plurisubharmonic current. The purpose of this Note is to prove an extension result for a positive plurisubharmonic (Psh) current T defined in the complement of a closed complete pluripolar set A, under the hypothesis that $H_{2p}(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A) = 0$ and that dd^cT has a locally finite mass. We prove in the first part an Oka type inequality for a positive Psh current. We then prove an extension result for such a current across an irreductible analytic set, thereby generalizing a result of Siu concerning positive closed current and one of our previous results for a negative Psh current. ***To cite this article: K. Dabbek, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

Let Ω be an open subset of $\mathbb{C}^n$ and A a closed subset of Ω. For a current T defined on $\Omega \smallsetminus A$, we say that the trivial extension $\widetilde{T}$ of T exists on Ω if the mass of T is locally finite near every point of A, so that T can be extended by 0 on A. We say that a current T is plurisubharmonic (Psh) if dd^cT is positive. We first prove the following Oka type inequality:

Theorem 1. *Let A a closed complete pluripolar set of an open subset Ω of $\mathbb{C}^n$ and T be a positive Psh current of dimension p on $\Omega \backslash A$. Suppose that $\widetilde{dd^cT}$ exists. Let v be a psh function of class C^2 on Ω such that $\Omega_1 = \{z \in \Omega,\ v(z) < 0\}$ is relatively compact in Ω, let K and L two compacts sets such that $K \subset \Omega_1 \Subset L^o$. We set*

Adresse e-mail : khalifa.dabbek@fsg.rnu.tn (K. Dabbek).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.03.017

$c_K = -\sup_{z\in K} v(z)$. Then, for all integer $1 \leqslant s \leqslant p$ and every psh function u of class C^2 on Ω_1 satisfying $-1 \leqslant u < 0$, we have:

$$\int_{K\setminus A} T \wedge (dd^c u)^p \leqslant c_K^{-s} \int_{\Omega_1\setminus A} T \wedge (dd^c v)^s \wedge (dd^c u)^{p-s} + c_{K,L} \big\|\widetilde{dd^c T}\big\|_L \|v\|_{\infty(L)}^s$$

where $c_{K,L}$ is a positive constant which depends only on K and L.

Our main theorem is:

Theorem 2. *Let A a closed complete pluripolar subset of an open subset Ω of $\mathbb{C}^n$ and T be a positive Psh current of dimension p on $\Omega\setminus A$. Suppose that $\widetilde{dd^c T}$ exist and $H_{2p}(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A) = 0$. Then $\widetilde{T}$ exists on Ω and the residual current $S = \widetilde{dd^c T} - dd^c \widetilde{T}$ is positive and closed.*

Remark 1. In [3] Theorem 1 has been proved for a negative Psh current. The case of closed current had been already proved in [5].

As a consequence, we recover the following result which was proved by Siu [6] for a closed positive current:

Theorem 3. *Let X be an irreductible analytic subset of dimension p in an open subset Ω of $\mathbb{C}^n$. Let T be a positive Psh current of dimension p on $\Omega\setminus X$. Suppose that $\widetilde{dd^c T}$ exists and that T has a locally finite mass in a neighborhood of some $z_0 \in X$. Then $\widetilde{T}$ exists and the residual current $S = \widetilde{dd^c T} - dd^c \widetilde{T}$ is closed positive and supported in X.*

0. Introduction

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{D}_{p,q}(\Omega)$ l'espace des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ de bidegrés (p,q) et à support compact dans Ω. Un courant T de bidimension (p,p) sur Ω est un élément du dual topologique de $\mathcal{D}_{p,p}(\Omega)$. On dit que T est positif si pour toutes formes $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ dans l'espace $\mathcal{D}_{1,0}(\Omega)$, la distribution $T \wedge i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$ est une mesure positive sur Ω. On dit que T est plurisousharmonique (Psh) si $dd^c T$ est un courant positif. Soit $\beta = dd^c|z|^2$ la forme de Kähler sur $\mathbb{C}^n$. Il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de n et p telle que, pour chaque ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$, la masse de T, $\|T\|_{\Omega_1} := \sup\{|T(\varphi)|;\ \varphi \in \mathcal{D}_{p,p}(\Omega_1),\ \|\varphi\| \leqslant 1\}$, portée par Ω_1, vérifie $T \wedge \beta^p(\Omega_1) \leqslant \|T\|_{\Omega_1} \leqslant cT \wedge \beta^p(\Omega_1)$. Soit A un fermé de Ω. Lorsque T est défini sur $\Omega \setminus A$ on dit que l'extension triviale $\widetilde{T}$ existe si T est de masse localement finie au voisinage des points de A, et on pose alors $\widetilde{T}$ égal à zéro au dessus de A.

1. Inégalité de type Oka pour un courant Psh

Dans cette section, on démontre une inegalité de type Oka pour un courant positif Psh défini en déhors d'un ensemble fermé pluripolaire complet tel que son dd^c soit de masse localement finie.

Théorème 1. *Soient A un fermé pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif Psh sur $\Omega\setminus A$. On suppose que $dd^c T$ est de masse localement finie sur Ω. Soit v une fonction psh de classe C^2 sur Ω telle que $\Omega_1 = \{z \in \Omega, v(z) < 0\}$ soit rélativement compact de Ω. Soient K et L deux compacts vérifiant $K \subset \Omega_1 \Subset L^o$ et soit $c_K = -\sup_{z\in K} v(z)$; alors pour tout entier $1 \leqslant s \leqslant p$ et toute fonction u psh C^2 dans Ω_1, vérifiant $-1 \leqslant u < 0$ on a* :

$$\int_{K\setminus A} T \wedge (dd^c u)^p \leqslant c_K^{-s} \int_{\Omega_1\setminus A} T \wedge (dd^c v)^s \wedge (dd^c u)^{p-s} + c_{K,L} \big\|\widetilde{dd^c T}\big\|_L \|v\|_{\infty(L)}^s$$

avec $c_{K,L}$ est une constante positive qui ne depend que de K et L.

Démonstration. Soit O un ouvert tel que $\Omega_1 \Subset O \Subset L^o$; désignons par U le potentiel assosié à $\widetilde{dd^c T}$ qui est un courant positif fermé par le théorème de El Mir [4].

$$U(z) = -C_n \int_{x\in\mathbb{C}^n} \eta(x)\widetilde{dd^cT}(x) \wedge h(z-x)\beta^{n-1}(z-x)$$

avec C_n est une constante strictement positive, $h(z) = \frac{1}{|z|^{2n-2}}$, $\beta(z) = dd^c|z|^2$ et $\eta \in D(L^\circ)$; $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ et $\eta \equiv 1$ dans O. Le courant U est négatif de dimension p et $dd^cU = \eta\widetilde{dd^cT} + R$, où R est une forme C^∞. Quitte à choisir $\alpha > 0$ tel que $R + \alpha\beta^{n-p+1} > 0$, on peut supposer que la forme R est positive et donc le courant $T - U$ est positif de dd^c-négatif dans $O\setminus A$. On a d'aprés [3] :

$$\int_{K\setminus A} T \wedge (dd^cu)^p \leqslant \int_{K\setminus A} (T-U) \wedge (dd^cu)^p \leqslant c_K^{-s} \int_{\Omega_1\setminus A} (T-U) \wedge (dd^cv)^s \wedge (dd^cu)^{p-s}.$$

D'aprés [2] il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\int_{\Omega_1} -U \wedge (dd^cv)^s \wedge (dd^cu)^{p-s} \leqslant C_1\|U\|_O\|v\|^s_{\infty(O)}.$$

Or il existe une constante $C_2 > 0$ telle que $\|U\|_O \leqslant C_2\|\eta\widetilde{dd^cT}\|_L$, donc

$$\int_{K\setminus A} T \wedge (dd^cu)^p \leqslant c_K^{-s} \int_{\Omega_1\setminus A} T \wedge (dd^cv)^s \wedge (dd^cu)^{p-s} + c_{K,L}\left\|\widetilde{dd^cT}\right\|_L\|v\|^s_{\infty(L)}. \qquad \square$$

Remarque 1.

(1) Ce resultat a été démontré dans [3] pour un courant négatif Psh sans aucune conditions sur le prolongement de dd^cT.
(2) Le cas d'un courant positif fermé est démontré dans [2].
(3) En 2004 M. Toujani et Ben Messaoud, dans [7], ont montré ce même résultat pour $A = \emptyset$.

Proposition 1. *Soient A un fermé pluripolaire complet de $B^k \times B^{n-k}$ et T un courant positif Psh sur $(B^k \times B^{n-k})\setminus A$ de dimension p tel que dd^cT est de masse localement finie au voisinage de points de A. Soit $k \leqslant p < n$ tel que :*

(a) *Il existe $0 \leqslant r < 1$ pour lequel T est de masse localement finie au voisinage de points de $\{(z', z'') \in B^k \times B^{n-k}, \|z''\| > r\}$.*
(b) *$T \wedge (dd^c|z'|^2)^k$ est de masse localement finie sur $B^k \times B^{n-k}$.*

Alors T est de masse localement finie sur $B^k \times B^{n-k}$.

Démonstration. On peut supposer que $k = p$ (si non on considère le courant $T \wedge \beta^{p-k}$). Pour $r < a < t < 1$ on pose :

$$v_\varepsilon(z) = \max_\varepsilon\left(|z'|^2 - t^2, \frac{1}{t^2 - a^2}\left(|z''|^2 - t^2\right)\right)$$

avec $\max_\varepsilon$ est le produit de convolution de la fonction $(x_1, x_2) \mapsto \max(x_1, x_2)$ par un noyau régularisant positif sur $\mathbb{R}^2$ qui ne depent que de $\|(x_1, x_2)\|$. Alors v_ε est une fonction psh de classe C^∞ vérifiant :

$$-1 \leqslant v_\varepsilon < 0 \quad \text{sur } tB^k \times tB^{n-k}, \quad v_\varepsilon \equiv |z'|^2 - t^2 \quad \text{sur } \left\{|z''| \leqslant a\right\}.$$

Alors on a :

$$\int_{(tB^k\times tB^{n-k})\setminus A} T \wedge (dd^cv_\varepsilon)^k \leqslant \int_{tB^k\times\{|z''|<a\}\setminus A} T \wedge \left(dd^c|z'|^2\right)^k + \int_{(tB^k)\times\{a\leqslant|z''|<t\})\setminus A} T \wedge (dd^cv_\varepsilon)^k.$$

Les deux termes de droite sont finis par (a) et (b). Soit K un compact de $B^k \times B^{n-k}$, t_1 et t_2 tels que $a < t_1 < t_2 < 1$ et $K \subset t_1 B^k \times t_1 B^{n-k}$, le Théorème 1 appliqué à $v = v_\varepsilon$, $u = |z|^2 - 1$, $s = k$ et $L = \overline{t_2 B^k \times t_2 B^{n-k}}$ donne :

$$\int_{K \setminus A} T \wedge \beta^k \leqslant c_K^{-s} \int_{t_1 B^k \times t_1 B^{n-k} \setminus A} T \wedge (dd^c v_\varepsilon)^k + c_{K,L} \left\| \widetilde{dd^c T} \right\|_L \|v_\varepsilon\|_{\infty(L)}.$$

Donc T est de masse localement finie sur $B^k \times B^{n-k}$. □

Proposition 2. *Soient A un fermé pluripolaire complet de $B^k \times B^{n-k}$ et T un courant positif Psh sur $(B^k \times B^{n-k}) \setminus A$ de dimension p tel que $dd^c T$ est de masse localement finie au voisinage de points de A. Soit $k \leqslant p < n$ tel que :*

(a) *Il existe $0 \leqslant r < 1$ pour lequel T est de masse localement finie au voisinage de points de $\{(z', z'') \in B^k \times B^{n-k};\ \|z''\| > r\}$.*
(b) *Il existe un ouvert $O \subset B^k$ tel que $T \wedge (dd^c |z'|^2)^k$ soit de masse localement finie sur $O \times B^{n-k}$. Alors T est de masse localement finie sur $B^k \times B^{n-k}$.*

Démonstration. Sans perte de géneralité on peut supposer que $p = k$. Soient a et t deux réels dans $]r, 1[$ tels que $a < t$. On pose :

$$v_\varepsilon(z) = \max_\varepsilon \left(\pi^* v, \frac{1}{t^2 - a^2} \left(|z''|^2 - t^2 \right) \right)$$

avec π est la projection sur $\mathbb{C}^k$, v est une fonction psh de classe C^∞ sur B^k tel que $(dd^c v)^k$ a le support inclu dans O et $\max_\varepsilon$ comme dans la Proposition 1. Comme $-1 < v_\varepsilon < 0$ sur $t B^k \times t B^{n-k}$ et $v_\varepsilon \equiv \pi^* v$ sur $\{|z''| \leqslant a\}$, on obtient :

$$\int_{t B^k \times t B^{n-k} \setminus A} T \wedge (dd^c v_\varepsilon)^k \leqslant \int_{t B^k \times \{|z''| < a\} \setminus A} T \wedge \left(dd^c (\pi^* v) \right)^k + \int_{(t B^k) \times \{a \leqslant |z''| < t\} \setminus A} T \wedge (dd^c v_\varepsilon)^k.$$

En appliquant la Proposition 1 sur l'ouvert $O \times B^{n-k}$, T est de masse localement finie sur $O \times B^{n-k}$. Comme $(dd^c(\pi^* v))^k$ est porté par $O \times B^{n-k}$, les deux dernières intégrales sont finies. De même que la démonstration de le Théorème 1 on peut conclure que T est de masse localement finie. □

2. Preuve du théorème principale

Théorème 2. *Soient A un fermé pluripolaire complet d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et T un courant positif Psh sur $\Omega \setminus A$ de dimension p tel que $dd^c T$ est de masse localement finie au voisinage des points de A. On suppose que $H_{2p}(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A) = 0$. Alors T est de masse localement finie et le courant résiduel $S = \widetilde{dd^c T} - dd^c \widetilde{T}$ est positif fermé porté par A.*

Démonstration. Le problème est locale donc il suffit de montrer que T est de masse localement finie au voisinage de tout point $z_0 \in \overline{\operatorname{supp} T} \cap A$. Sans perte de géneralité on peut supposer que $z_0 = 0$. Comme $H_{2p}(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A) = 0$, il existe un système des coordonées et un ouvert $B^p \times B^{n-p} \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}$ tel que $(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A) \cap (B^p \times \partial B^{n-p}) = \emptyset$. Par consequence l'application $\pi : (\overline{\operatorname{supp} T} \cap A) \cap (B^p \times B^{n-p}) \to B^p$ est propre et on a $H_{2p}(\pi(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A)) = 0$ donc $\pi(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A)$ est un fermé de mesure de Lebesgue nulle. Par suite on peut trouver un ouvert $O \subset B^p \setminus \pi(\overline{\operatorname{supp} T} \cap A)$ et T vérifie les hypothèses de la Proposition 2, donc il est de masse localement finie. Le Théorème 2 de [3] donne la positivité du courant résiduel et la fermeture est assurée par le Théorème II.1 de [4]. □

Remarque 2.

(1) Le cas d'un courant positif fermé est démontré dans [5] en 1998.
(2) En 2003 Dabbek, El Mir et Elkhadhra, dans [3], ont démontré ce resultat pour un courant négatif Psh sans aucune condition sur le prolongement du cournt $dd^c T$.

Comme conséquence du Théorème 1 on a la géneralisation suivante du théorème de Siu [6].

Théorème 3. *Soit X un ensemble analytique irréductible de dimension complexe p d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Soit T un courant positif Psh de dimension p sur $\Omega\backslash X$. On suppose que dd^cT est de masse localement finie au voisinage de points de X et T de masse localement finie au voisinage d'un point z_0 de X. Alors T est de masse localement finie au voisinage des points de X , l'extenssion triviale $\widetilde{T}$ de T existe et il existe un courant positif fermé S porté par A tel que $S = \widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$.*

Démonstration. On pose :

$$\widetilde{X} = \{z \in \mathrm{Reg}(X) \text{ tel que } T \text{est de masse localement finie au voisinage de } z\}.$$

Il est claire que $\widetilde{X}$ est un ouvert non vide de $\mathrm{Reg}(X)$. Montrons que $\widetilde{X}$ est un fermé de $\mathrm{Reg}(X)$.

Soit $(a_j)_{j\in N}$ une suite d'élements de $\widetilde{X}$ convergente vers a_0 (on peut supposer que $a_0 = 0$) alors il existe un système de coordonées et un ouvert $rB^p \times rB^{n-p}$ tels que $\mathrm{Reg}(X) \cap (rB^p \times rB^{n-p}) = \{z_{p+1} = \cdots = z_n = 0\}$. Donc sur $rB^p \times rB^{n-p}$, T vérifie les conditions de la Proposition 2, par suite T est de masse localement finie sur $rB^p \times rB^{n-p}$, ce qui prouve que $\widetilde{X}$ est un fermé. Or $\mathrm{Reg}(X)$ est un connexe, donc $\widetilde{X} = \mathrm{Reg}(X)$.

On sait que $\mathrm{Sing}(X)$ est un ensemble analytique de dimension strictement inférieure à celle de X donc $H_{2p}(\mathrm{Sing}(X)) = 0$ par le Théorème 1 $\widetilde{T}$ existe. Le Théorème 2 de [3] nous donne que $S = \widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T}$ est un courant positif fermé porté par X. □

Remarque 3.

(1) Le cas où T est un courant positif fermé est démontré par Siu [6] en 1974.
(2) Dabbek, Elkhadhra et Elmir [3] en 2003 ont montré ce résultat en remplacant la condition de prolongement de dd^cT par $dd^cT \leqslant 0$.

Le corollaire suivant est démontré dans [1] en 1993 :

Corollaire 1. *Soit X un ensemble analytique irréductible de dimension complexe $p-1$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Soit T un courant positif Psh de dimension p sur $\Omega\backslash X$. On suppose que $\widetilde{dd^cT}$ existe au voisinage d'un point z_0 de X.*
Alors $\widetilde{T}$ existe et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{dd^cT} - dd^c\widetilde{T} = c[X]$.

Démonstration. Le courant dd^cT est un courant positif fermé de dimension $p-1$, donc le théorème de Siu [6] donne que dd^cT est de masse localement finie sur Ω. Le résultat se déduit du Théorème 2. □

Remerciements

Je remercie le rapporteur pour ses remarques importantes sur une première version de cet article. Je remercie également mon professeur H. El Mir pour l'attention continue qu'il a porté à ce travail.

Références

[1] L. Alessandrini, G. Bassanelli, Plurisubhamonic currents and their extension across analytic subsets, Forum Math. 5 (6) (1993) 577–602.
[2] H. Ben Messaoud, H. El Mir, Opérateur de Monge Ampère et tranchage des courants positifs fermés, J. Geom. Anal. 10 (1) (2000) 139–168.
[3] K. Dabbek, F. Elkhadhra, H. El Mir, Extension of plurisubharmonic currents, Math. Z. 245 (3) (2003) 455–481.
[4] H. El Mir, Sur le prolongement des courants positifs fermés, Acta Math. 153 (12) (1984) 1–45.
[5] H. El Mir, I. Feki, Prolongement et contrôle d'un courant positif fermé par ses tranches, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 327 (9) (1998) 797–802.
[6] Y.T. Siu, Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, Invent. Math. 27 (1974) 53–156.
[7] M. Toujani, H. Ben Messaoud, Prolongement d'un courant négatif plurisouharmonique avec condition sur les tranches, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (8) (2004) 543–548.