Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 937–942

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Contrôle optimal/Équations aux dérivées partielles

Observabilité exacte frontière pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires

Tatsien Li

School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China

Reçu le 16 février 2006 ; accepté le 22 février 2006

Disponible sur Internet le 16 mai 2006

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

En utilisant une méthode directe et constructive basée sur la théorie des solutions C^1 semi-globales, l'observabilité exacte frontière locale est établie pour les systèmes hyperboliques quasi-linéaires unidimensionnels du premier ordre avec des conditions aux limites non-linéaires générales. ***Pour citer cet article : T. Li, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Exact boundary observability for quasilinear hyperbolic systems. By means of a direct and constructive method based on the theory of semi-global C^1 solution, the local exact boundary observability is established for one-dimensional first order quasilinear hyperbolic systems with general nonlinear boundary conditions. ***To cite this article: T. Li, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

We consider the local exact boundary observability for the following mixed initial-boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u)\frac{\partial u}{\partial x} = F(u) \quad (F(0) = 0), \tag{1}$$

$$t = 0: \quad u = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{2}$$

$$x = 0: \quad v_s = G_s(t, v_1, \ldots, v_m) \quad (s = m+1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$x = L: \quad v_r = G_r(t, v_{m+1}, \ldots, v_n) \quad (r = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

where on the domain under consideration the matrix $A(u)$ has n real eigenvalues $\lambda_r(u) < 0 < \lambda_s(u)$ $(r = 1, \ldots, m;\ s = m+1, \ldots, n)$ and a complete set of left eigenvectors $l_i(u) = (l_{i1}, \ldots, l_{in}(u))$ $(i = 1, \ldots, n)$: $l_i(u)A(u) = \lambda_i(u)l_i(u)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ is defined by $v_i = l_i(u)u$ $(i = 1, \ldots, n)$ and we assume that $G_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Adresse e-mail : dgli@fudan.edu.cn.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.02.036

Theorem 1. *Let $T > L\max_{i=1,\dots,n}|\lambda_i^{-1}(0)|$. For any given initial data $\varphi(x)$ with small $C^1[0,L]$ norm, such that the conditions of C^1 compatibility are satisfied at the points $(t,x)=(0,0)$ and $(0,L)$ respectively, the observed values $v_r=\bar{v}_r(t)$ $(r=1,\dots,m)$ at $x=0$ and $v_s=\bar{\bar{v}}_s(t)$ $(s=m+1,\dots,n)$ at $x=L$ on the interval $[0,T]$ determine uniquely the initial data $\varphi(x)$ $(0\leqslant x\leqslant L)$ and we have the following observability inequality*:

$$\|\varphi\|_{C^1[0,L]}\leqslant C\left(\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}+\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{\bar{v}}_s\|_{C^1[0,T]}\right), \tag{5}$$

where C is a positive constant.

Theorem 2. *Suppose that the number of positive eigenvalues is less than or equal to that of negative ones: $n\leqslant 2m$. Suppose furthermore that in a neighbourhood of $u=0$, boundary condition* (4) *implies*

$$x=L:\quad v_s=\overline{G}_s(t,v_1,\dots,v_m)\quad(s=m+1,\dots,n) \tag{6}$$

with $\overline{G}_s(t,0,\dots,0)\equiv 0$ $(s=m+1,\dots,n)$. Let $T>L(\max_{r=1,\dots,m}|\lambda_r^{-1}(0)|+\max_{s=m+1,\dots,n}\lambda_s^{-1}(0))$. For any given initial data $\varphi(x)$ with the same property as presented in Theorem 1*, the observed values $v_r=\bar{v}_r(t)$ $(r=1,\dots,m)$ at $x=0$ on the interval $[0,T]$ determine uniquely the initial data $\varphi(x)$ $(0\leqslant x\leqslant L)$ and we have the following observability inequality*:

$$\|\varphi\|_{C^1[0,L]}\leqslant C\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}, \tag{7}$$

where C is a positive constant.

1. Introduction et résultats principaux

Il y a beaucoup de résultats sur l'observabilité exacte frontière pour les systèmes hyperboliques linéaires (voir [1–3,6,7,9–11], par exemple). Dans cette Note on considère le cas quasi-linéaire.

Nous considérons le système hyperbolique quasi linéaire du premier ordre suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u)\frac{\partial u}{\partial x}=F(u), \tag{8}$$

où $u=(u_1,\dots,u_n)^{\mathrm{T}}$ est une fonction vectorielle inconnue de variables (t,x), $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est une fonction régulière de u telle que

$$F(0)=0, \tag{9}$$

et $A(u)=(a_{ij}(u))$ est une matrice $n\times n$ à éléments réguliers en fonction de u. Par l'hyperbolicité, dans le domaine considéré la matrice $A(u)$ possède n valeurs propres réeles :

$$\lambda_r(u)<0<\lambda_s(u)\quad(r=1,\dots,m;\ s=m+1,\dots,n) \tag{10}$$

et un ensemble complet de vecteurs propres à gauche $l_i(u)=(l_{i1}(u),\dots,l_{in}(u))$, et à droite $r_i(u)=(r_{i1}(u),\dots,r_{in}(u))^{\mathrm{T}}$ $(i=1,\dots,n)$:

$$l_i(u)A(u)=\lambda_i(u)l_i(u),\qquad A(u)r_i(u)=\lambda_i(u)r_i(u). \tag{11}$$

Sans perte de généralité, nous supposons que

$$l_i(u)r_j(u)\equiv\delta_{ij}\quad(i,j=1,\dots,n),\qquad r_i^{\mathrm{T}}(u)r_i(u)\equiv 1\quad(i=1,\dots,n), \tag{12}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Posant

$$v_i=l_i(u)u\quad(i=1,\dots,n), \tag{13}$$

nous considérons le problème mixte suivant pour le système (8) avec la condition initiale :

$$t=0:\quad u=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant L \tag{14}$$

et les conditions aux limites :

$$x=0: \quad v_s = G_s(t, v_1, \ldots, v_m) + H_s(t) \quad (s = m+1, \ldots, n), \tag{15}$$

$$x=L: \quad v_r = G_r(t, v_{m+1}, \ldots, v_n) + H_r(t) \quad (r = 1, \ldots, m), \tag{16}$$

où

$$G_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

Puisque l'observabilité exacte frontière des systèmes hyperboliques exige un temps minimal à cause de la vitesse finie de la propagation des ondes, nous avons besoin de l'existence et unicité d'une solution C^1 semi-globale du problème (8) et (14)–(16).

Lemme 1. *(Voir [4,5,8]) Soient $\lambda_i(u)$, $l_i(u)$, $f_i(u)$, $G_i(t,\cdot)$, $H_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $\varphi(x)$ des functions de classe C^1 dans leurs domaines de définition. Supposons que les relations* (9), (10) *et* (17) *soient satisfaites. Supposons de plus que les conditions de compatiblité C^1 sont satisfaites aux points* $(0,0)$ *et* $(0,L)$ *respectivement. Alors, pour tout $T_0 > 0$, le problème* (8) *et* (14)–(16) *admet une solution C^1 semi-globale unique $u = u(t,x)$ dans le domaine $R(T_0) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T_0,\ 0 \leqslant x \leqslant L\}$, pourvu que les normes $\|\varphi\|_{C^1[0,L]}$ et $\|H\|_{C^1[0,T_0]}$ soient suffisamment petites (dépendant de T_0). De plus, sous l'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles $\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,\cdot)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont localement Lipschitziennes par rapport à $v = (v_1, \ldots, v_n)$, on a*

$$\|u\|_{C^1[R(T_0)]} \leqslant C\big(\|\varphi\|_{C^1[0,L]} + \|H\|_{C^1[0,T_0]}\big), \tag{18}$$

où C est une constante positive éventuellement dépendante de T_0.

Corollaire 1. *Supposons que $\lambda_i(u)$, $l_i(u)$, $f_i(u)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions de classe C^1 dans leurs domaines de définition et que la relation* (9) *est satisfaite. Alors, le problème de Cauchy* (8) *et* (14) *admet une solution C^1 globale unique $u = u(t,x)$ sur tout son domaine de détermination maximal, et u vérifie la majoration*

$$\|u\|_{C^1} \leqslant C\|\varphi\|_{C^1[0,L]}, \tag{19}$$

où C est une constante positive.

En utilisant le Lemme 1 et le Corollaire 1, nous pouvons établir l'observabilité exacte frontière locale pour le problème mixte (8) et (14)–(16) où $H_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$:

Théorème 1. *Supposons que $H_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ et que toutes les hypothèses du Lemme* 1 *sont satisfaites. Soit T un nombre vérifiant*

$$T > L \max_{\substack{r=1,\ldots,m \\ s=m+1,\ldots,n}} \left(\frac{1}{|\lambda_r(0)|}, \frac{1}{\lambda_s(0)}\right). \tag{20}$$

Alors, si la norme $C^1[0,L]$ de φ est suffisamment petite, les données initiales $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^{\mathrm{T}}$ sont uniquement déterminées par les valeurs observées $v_r = \bar{v}_r(t)$ $(r = 1, \ldots, m)$ en $x = 0$ et $v_s = \bar{\bar{v}}_s(t)$ $(s = m+1, \ldots, n)$ en $x = L$ sur l'intervalle $[0,T]$. *De plus, on a l'inégalité d'observabilité suivante* :

$$\|\varphi\|_{C^1[0,L]} \leqslant C\left(\sum_{r=1}^{m} \|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]} + \sum_{s=m+1}^{n} \|\bar{\bar{v}}_s\|_{C^1[0,T]}\right), \tag{21}$$

où C est une constante positive.

Théorème 2. *On fait les hypothèses du Théorème* 1 *et on suppose en plus que le nombre de valeurs propres positives est inférieur ou égal à celui de valeurs propres négatives* :

$$\overline{m} := n - m \leqslant m, \quad i.e., \quad n \leqslant 2m. \tag{22}$$

et que, dans un voisinage de $u = 0$, la condition aux limites (16) *implique*

$$x=L: \quad v_s = \overline{G}_s(t, v_1, \ldots, v_m) \quad (s = m+1, \ldots, n) \tag{23}$$

avec

$$\overline{G}_s(t,0,\ldots,0)\equiv 0 \quad (s=m+1,\ldots,n). \tag{24}$$

Soit T un nombre vérifiant

$$T > L\left(\max_{r=1,\ldots,m}\frac{1}{|\lambda_r(0)|}+\max_{s=m+1,\ldots,n}\frac{1}{\lambda_s(0)}\right). \tag{25}$$

Alors, si la norme $C^1[0,L]$ de φ est suffisamment petite, les données initiales $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)^{\mathrm{T}}$ sont uniquement déterminées par les valeurs observées $v_r=\bar{v}_r$ $(r=1,\ldots,m)$ en $x=0$ sur l'intervalle $[0,T]$. De plus, on a l'inéqalité d'observabilité suivante :

$$\|\varphi\|_{C^1[0,L]}\leqslant C\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}, \tag{26}$$

où C est une constante positive.

Remarque 1. Le temps d'observabilité donné en (20), ou en (25), est optimal.

2. Démonstration du Théorème 1

Puisque la norme $C^1[0,L]$ de φ est suffisamment petite, la norme $C^1[0,T]$ des valeurs observées $v_r=\bar{v}_r(t)$ $(r=1,\ldots,m)$ est aussi petite grâce au Lemme 1. En utilisant la condition aux limites (15), on voit que les valeurs v_s $(s=m+1,\ldots,n)$ en $x=0$ sont données par

$$\bar{v}_s(t)=G_s\big(t,\bar{v}_1(t),\ldots,\bar{v}_m(t)\big) \quad (s=m+1,\ldots,n) \tag{27}$$

et, notant (17), on a

$$\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{v}_s\|_{C^1[0,T]}\leqslant C_1\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}, \tag{28}$$

où C_i $(i=1,2,\ldots)$ désignent ici et plus loin des constantes positives convenables. Donc, grâce aux relations (12), la valeur $\bar{u}(t)$ de la solution $u=u(t,x)$ en $x=0$ est aussi déterminée par $\bar{v}_r(t)$ $(r=1,\ldots,m)$, et on a

$$\|\bar{u}\|_{C^1[0,T]}\leqslant C_2\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}. \tag{29}$$

De façon similaire, la valeur $\bar{\bar{u}}(t)$ de la solution u en $x=L$ satisfait

$$\|\bar{\bar{u}}\|_{C^1[0,T]}\leqslant C_3\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{\bar{v}}_s\|_{C^1[0,T]}. \tag{30}$$

Maintenant, on échange l'ordre des variables t, x et on considère le système (8) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+A^{-1}(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\widetilde{F}(u):=A^{-1}(u)F(u) \quad (\widetilde{F}(0)=0). \tag{31}$$

Grâce au Corollaire 1, le problème de Cauchy pour le système (31) avec la condition initiale en $x=0$ [resp. en $x=L$]

$$x=0: \quad u=\bar{u}(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{32}$$

$$[\text{resp. } x=L: \quad u=\bar{\bar{u}}(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T] \tag{33}$$

admet une solution C^1 globale unique $u=\tilde{u}(t,x)$ [resp. $u=\tilde{\tilde{u}}(t,x)$] sur son domaine de détermination maximal, et

$$\|\tilde{u}\|_{C^1}\leqslant C_4\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]} \tag{34}$$

$$[\text{resp. } \|\tilde{\tilde{u}}\|_{C^1}\leqslant C_5\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{\bar{v}}_s\|_{C^1[0,T]}]. \tag{35}$$

Évidemment, $u=\tilde{u}(t,x)$ et $u=\tilde{\tilde{u}}(t,x)$ sont les restrictions de la solution $u=u(t,x)$ du problème original sur les domaines correspondants respectifs.

D'après (20), ces deux domaines de détermination maximals doivent avoir une intersection non vide. Donc, il existe T_0 $(0<T_0<T)$ tel que la valeur $\hat{u}(x)$ de la solution $u=u(t,x)$ sur $t=T_0$ peut être déterminée par $u=\tilde{u}(t,x)$ et $u=\tilde{\tilde{u}}(t,x)$ et, d'après (34) et (35), on a

$$\|\hat{u}\|_{C^1[0,L]} \leqslant C_6\left(\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}+\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{\bar{v}}_s\|_{C^1[0,T]}\right). \tag{36}$$

Maintenant on considère le problème mixte pour le système (8) avec

$$t=T_0: \quad u=\hat{u}(x), \quad 0\leqslant x\leqslant L, \tag{37}$$

$$x=0: \quad v_r=\bar{v}_r(t) \quad (r=1,\dots,m), \quad 0\leqslant t\leqslant T_0, \tag{38}$$

$$x=L: \quad v_s=\bar{\bar{v}}_s(t) \quad (s=m+1,\dots,n), \quad 0\leqslant t\leqslant T_0. \tag{39}$$

Grâce au Lemme 1 et à la majoration (36), $u=u(t,x)$, la solution C^1 de ce problème mixte sur le domaine $R(T_0)=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T_0,\ 0\leqslant x\leqslant L\}$ vérifie la majoration

$$\|u\|_{C^1} \leqslant C_7\left(\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}+\sum_{s=m+1}^{n}\|\bar{\bar{v}}_s\|_{C^1[0,T]}\right), \tag{40}$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inéqalité (21).

3. Démonstration du Théorème 2

Grâce à la condition aux limites (15), la valeur $\bar{u}(t)$ de la solution $u=u(t,x)$ en $x=0$ est déterminée par les valeurs observées $v_r=\bar{v}_r(t)$ $(r=1,\dots,m)$ et on a encore la majoration (29).

Grâce au Corollaire 1, le problème de Cauchy pour le système (31) avec la condition initiale

$$x=0: \quad u=\bar{u}(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{41}$$

admet une solution C^1 globale unique $u=\tilde{u}(t,x)$ sur tout son domaine de détermination maximal, et on a la majoration (34)

D'après (25), il y a une intersection non vide entre ce domaine de détermination maximal et $x=L$. Donc, il existe T_0 $(0<T_0<T)$ tel que la valeur $\hat{u}(x)$ de la solution $u=u(t,x)$ en $t=T_0$ est déterminée par $u=\tilde{u}(t,x)$, et on a la majoration

$$\|\hat{u}\|_{C^1[0,L]} \leqslant C_8\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}. \tag{42}$$

Maintenant, on considère le problème mixte pour le système (8) avec les conditions (37)–(38) et (23). Grâce au Lemme 1 et à la majoration (42), $u=u(t,x)$, la solution C^1 de ce problème mixte sur $R(T_0)$, vérifie la majoration

$$\|u\|_{C^1} \leqslant C_9\sum_{r=1}^{m}\|\bar{v}_r\|_{C^1[0,T]}, \tag{43}$$

d'où on déduit immédiatement la majoration (26).

Références

[1] F. Alabau, V. Komornik, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 324 (1997) 519–524.
[2] C. Bardos, G. Lebeau, R. Rauch, SIAM J. Control Optim. 30 (1992) 1024–1065.
[3] I. Lasiecka, R. Triggiani, P. Yao, J. Math. Anal. Appl. 235 (1999) 13–57.
[4] T. Li, Y. Jin, Chinese Ann. Math. Ser. B 22 (2001) 325–336.
[5] T. Li, B. Rao, Y. Jin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001) 219–224.

[6] J.-L. Lions, Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, vol. I, Contrôlabilité Exacte, RMA, vol. 8, Masson, 1988.
[7] I. Trooshin, M. Yamamoto, Math. Methods Appl. Sci. 28 (2005) 2037–2059.
[8] Z. Wang, Exact controllability for nonautonomous first order quasilinear hyperbolic systems, Chinese Ann. Math., in press.
[9] P. Yao, SIAM J. Control Optim. 37 (1999) 1568–1599.
[10] E. Zuazua, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 326 (1998) 713–718.
[11] E. Zuazua, J. Math. Pures Appl. 78 (1999) 523–563.