Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 493–495
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse harmonique

Sur le groupe affine d'un corps local

Wassim Nasserddine

Institut de recherche mathématique avancée, université Louis-Pasteur et CNRS, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

Reçu le 10 janvier 2006 ; accepté le 7 février 2006

Disponible sur Internet le 6 mars 2006

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Soient G le groupe affine d'un corps local et $A(G)$ son algèbre de Fourier. On établit certaines propriétés pour G dont la principale est la suivante : si G est archimédien et $f \in A(G)$ à support compact dont la cotransformée de Fourier est de rang fini, alors $f = 0$. ***Pour citer cet article : W. Nasserddine, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

On the affine group of a local filed. Let G be the affine group of a local field and $A(G)$ be its Fourier algebra. We prove some properties for G of which the principal is the following: if G is Archimedian and $f \in A(G)$ with compact support for which the Fourier cotransform is of finite rank, then $f = 0$. ***To cite this article: W. Nasserddine, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Introduction

Soient G un groupe localement compact abélien (LCA) et $A(G)$ son algèbre de Fourier. On appelle (P.W) la propriété suivante : si $f \in A(G)$ à support compact dont la transformée de Fourier est à support compact, alors $f = 0$. Cette propriété vraie pour $G = \mathbb{R}$ ne reste plus valable pour un groupe G LCA arbitraire ; on peut se poser la question suivante : que se passe-t-il autour de la propriété P.W si on passe de $\mathbb{R}$ à G ? On prouve le résultat suivant : si K est une partie compacte quelconque de G, $\widehat{K}_1$ est une partie compacte quelconque de $\widehat{G}$, et

$$A_{K,\widehat{K}_1}(G) = \bigl\{f \in A(G), \operatorname{supp}(f) \subseteq K, \operatorname{supp}\bigl(\hat{f}\bigr) \subseteq \widehat{K}_1\bigr\}.$$

Alors $A_{K,\widehat{K}_1}(G)$ est un espace de Banach de dimension finie. Une conséquence de ce résultat est que la propriété P.W est valable sur G si et seulement si G ne contient pas d'ouvert compact. Le but principal de cette note est de généraliser la propriété P.W au groupe affine archimédien. En effet, soient dorénavant G le groupe affine d'un corps local $\mathbb{K}$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{K}^*, \mathrm{d}^*x = |x|^{-1}\,\mathrm{d}x)$, où $|\cdot|$ est le module dans $\mathbb{K}$, π la seule représentation unitaire irréductible (à une équivalence près) de dimension infinie de G [3, p. 209], et $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs nucléaires sur $\mathcal{H}$ muni de la norme nucléaire $\|.\|_1$. La cotransformation de Fourier définie par la formule suivante

$$\overline{\mathcal{F}}(T)(g) := \operatorname{Tr}\bigl(\pi(g)T\bigr),$$

Adresse e-mail : nasserdd@math.u-strasbg.fr (W. Nasserddine).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.02.009

où $g \in G$ et $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ sur $A(G)$ d'après [3, th. 2.3, p. 235]. Si G est un groupe LCA, alors

$$\hat{f} \to f, \quad f(x) := \int_{\widehat{G}} \hat{f}(\hat{x})\overline{(x, \hat{x})}\, \mathrm{d}\hat{x}$$

est un isomorphisme isométrique de $L^1(\widehat{G})$ sur $A(G)$. Donc l'espace $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, si $G = ax + b$, joue le rôle de $L^1(\widehat{G})$, via la cotransformation de Fourier $\overline{\mathcal{F}}$, ce qui permet la notation $\overline{\mathcal{F}}^{-1}(f) := \hat{f}$ si $f \in A(G)$.

On va prouver que si K est une partie compacte de G et M est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}$. Alors l'espace

$$A_{K,M}(G) = \{f \in A(G), \operatorname{supp}(f) \subseteq K, \operatorname{supp}(\hat{f}) := \operatorname{Im}(\hat{f}) \subseteq M\}$$

est un espace de Banach de dimension finie. Et que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, alors $A_{K,M}(G) = \{0\}$.

On montre aussi le résultat suivant dont l'analogue abélien est en défaut : $A(G)$ a la propriété de Radon–Nikodym (PRN) alors que $B(G)$, l'algèbre de Fourier–Stieltjes de G, n'a pas la PRN.

2. Groupes localement compacts abéliens

Soient G un groupe LCA et $\widehat{G}$ son dual. L'algèbre de Fourier $A(G)$ est par définition l'algèbre des fonctions f, transformées de Fourier des $\hat{f} \in L^1(\widehat{G})$, avec la norme $\|f\| = \|\hat{f}\|_1$, $f(x) = \int_{\widehat{G}} \hat{f}(\hat{x})\overline{(x, \hat{x})}\, \mathrm{d}\hat{x}$. Le résultat clé dans ce cas est le suivant :

Théorème 1. *Soient K une partie compacte quelconque de G et $\widehat{K}_1$ une partie compacte quelconque de $\widehat{G}$. Alors l'espace*

$$A_{K,\widehat{K}_1}(G) = \{f \in A(G), \operatorname{supp}(f) \subseteq K, \operatorname{supp}(\hat{f}) \subseteq \widehat{K}_1\}$$

est de dimension finie.

En fait, ce résultat nous permet de caractériser les groupes LCA ayant la propriété P.W qui sont exactement ceux qui ne contiennent pas d'ouvert compact [4, th. 10, p. 27]. D'autre part, le Théorème 1 se généralise aux parties de mesures finies de G et $\widehat{G}$ [4, th. 11, p. 27].

3. Groupe affine d'un corps local

L'algèbre $A(G)$ lorsque G est LCA a été étudiée avant 1962 et nous en trouvons une description complète dans [5]. En 1964 [2] Eymard a défini l'analogue de l'algèbre $A(G)$ lorsque G est localement compact non nécessairement abélien et montré un certain nombre de propriétés familières dans le cas classique pour cette algèbre. Voici une définition simple de l'algèbre $A(G)$:

$$A(G) = \{u = f * \tilde{g}, f, g \in L^2(G), \tilde{g}(x) = \overline{g(x^{-1})}\},$$

munie de la norme $\|u\| = \inf\{\|f\|_2\|g\|_2, u = f * \tilde{g}\}$. Cette définition est due à [2, th., p. 218]. L'analogie peut se voir de la manière suivante : si G est LCA, alors $L^1(\widehat{G}) = L^2(\widehat{G}).L^2(\widehat{G})$ et le théorème de Plancherel montre que

$$A(G) = L^2(G) * L^2(G).$$

Par la suite, et sauf mention contraire, on désigne par G le groupe affine d'un corps local $\mathbb{K}$ [3]. Comme l'application $f \to \hat{f} = \overline{\mathcal{F}}^{-1}(f)$ est une isométrie d'espaces de Banach de $A(G)$ sur $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, le Théorème 4 qui suit généralise le cas abélien (Théorème 1) au groupe affine qui n'est ni abélien ni unimodulaire. Le résultat annoncé sera donné par le Corollaire 5 (rappelons que G est dit archimédien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).

Lemme 2. *Soit $d \in \mathbb{N}$. Si T_n est une suite d'opérateurs de rang $\leqslant d$, sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ séparable quelconque, qui converge vers T pour la topologie normique ($\|T\| = \sup(\|Tx\|, \|x\| = 1)$), alors T est de rang $\leqslant d$.*

Proposition 3. *Soient $d \in \mathbb{N}$, $T \in L_\infty(\mathcal{H})$, l'espace des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$, K une partie compacte de G, et f_n une suite de $A(G)$ à support dans K. Si f_n converge vers f uniformément sur K, alors f_n converge vers f pour la topologie normique de $PM(G)$, l'espace des pseudomesures sur G. Si de plus $\hat{f}_n$ est de rang $\leqslant d$, pour tout n, et $\hat{f}_n$ converge vers T en norme dans $L_\infty(\mathcal{H})$, alors $f \in A(G)$.*

Théorème 4. *Soient K une partie compacte de G, M un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}$. Alors l'espace*

$$A_{K,M}(G) = \left\{ f \in A(G), \operatorname{supp}(f) \subseteq K, \operatorname{supp}(\hat{f}) := \operatorname{Im}(\hat{f}) \subseteq M \right\}$$

est un espace de Banach de dimension finie.

Définition. On dit que la propriété P.W est valable sur G si $A_{K,M}(G) = 0$ pour toute partie compacte K de G et tout sous-espace M de dimension finie de $\mathcal{H}$.

Corollaire 5. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ alors la propriété P.W est valable sur G.*

Ce résultat nous pousse à poser la question ouverte suivante : Est ce que la propriété P.W est en défaut si G est totalement discontinu (i.e. $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$ et $\neq \mathbb{R}$) ?

Remarque. Le Théorème 4 et son corollaire ainsi que d'autres résultats de [3] à savoir le théorème de Hausdorff–Young et les théorèmes d'inversion associés se généralisent au groupe matriciel $G_{nm} = ax + b$, $n \leqslant m$, d'un corps local (cf. [4, p. 70, 78, 80, 83]).

Soit X un espace de Banach. On dit que X a la propriété de Radon–Nikodym (PRN) s'il a la PRN pour tout espace mesurable (Ω, Σ, μ) dont la mesure μ est bornée i.e. pour toute mesure vectorielle v continue par rapport à μ, de Σ dans X (i.e. $\lim_{E\in\Sigma,\mu(E)\to 0} \nu(E) = 0$), de variation bornée, il existe une intégrale de Bochner g de (Ω, Σ, μ) dans X, telle que $v(E) = \int_E g\,\mathrm{d}\mu$ pour toute $E \in \Sigma$. Voici une définition plus simple qui est due à [1, cor. 8, p. 138] : *X a la PRN s'il a la PRN par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $[0, 1]$.

Proposition 6. *Soit G un groupe localement compact séparable. Si $A(G) = B(G) \cap \mathcal{K}_0(G)$, où $B(G)$ est l'algèbre de Fourier–Stieltjes de G, et $\mathcal{K}_0(G)$ est l'ensemble des fonctions continues sur G qui tendent vers 0 à l'infini, alors $A(G)$ est un espace dual.*

Théorème 7. *Soit G le groupe affine d'un corps local, alors*

(i) *$A(G)$ a la PRN alors que $B(G)$ n'a pas la PRN, ce qui ne se produit pas lorsque G est LCA.*
(ii) *Soit $A(G)^+ = \{f \in A(G), f \geqslant 0\}$. Soit $f \in A(G)^+ \cap L^1(G)$, alors la cotransformée de Fourier $\hat{f} = \overline{\mathcal{F}}^{-1}(f)$ est de rang fini si et seulement si f est identiquement nulle.*

Remarques. Il existe une infinité d'opérateurs de rang fini dont les images par $\overline{\mathcal{F}}$ ne sont pas dans $L^1(G)$ et, en particulier, ne sont pas à support compact.

Soit $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions régulières à support compact sur G. Soit $f \in \mathcal{D}(G)$, alors $\pi(f)$ *et $\hat{f}$ n'ont pas, en général, les mêmes propriétés d'opérateur.* En fait, l'opérateur $\hat{f}$ est toujours nucléaire alors que l'opérateur $\pi(f)$ n'est pas nécessairement compact.

Références

[1] J. Diestel, J.J. Uhl Jr., Vector Measures, American Mathematical Society, Providence, RI, 1977.
[2] P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France 92 (1964) 181–236.
[3] P. Eymard, M. Terp, La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des $ax + b$ d'un corps local, in : Analyse harmonique sur les groupes de Lie II, (Sém., Nancy–Strasbourg 1976–1978), in : Lecture Notes in Math., vol. 739, Springer, Berlin, 1979, pp. 207–248 (in French).
[4] W. Nasserddine, Poids de Beurling et algèbre de Fourier du groupe affine d'un corps local, Thèse de doctorat de l'université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 2005. Preprint IRMA. http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications.
[5] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience Publishers, New York, 1962.