Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 515–518
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Systèmes dynamiques

Développement asymptotique et sommabilité des solutions des équations linéaires aux q-différences

Jean-Pierre Ramis [a], Jacques Sauloy [a], Changgui Zhang [b]

[a] *Laboratoire Emile-Picard, CNRS UMR 5580 et IUF, UFR MIG, université Paul-Sabatier de Toulouse, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France*
[b] *Laboratoire P. Painlevé CNRS UMR 8524, UFR Math., université des sciences et technologies de Lille, cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France*

Reçu le 9 décembre 2005 ; accepté le 20 janvier 2006

Disponible sur Internet le 24 février 2006

Présenté par Jean-Pierre Ramis

Résumé

Nous décrivons des q-analogues des développements asymptotiques et des séries multisommables et nous les appliquons à la classification analytique locale des équations aux q-différences linéaires irrégulières, répondant ainsi à des questions de G.D. Birkhoff. ***Pour citer cet article : J.-P. Ramis et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Asymptotic expansion and summability of solutions of linear q-difference equations. We describe q-analogs of asymptotic expansions and of multisummable series and we apply them to the local analytic classification of irregular linear q-difference equations, thus answering questions of G.D. Birkhoff. ***To cite this article: J.-P. Ramis et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Introduction

Soit q un nombre complexe de module > 1. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$, on note $[\lambda] = [\lambda; q] = \lambda q^{\mathbf{Z}}$ la *q-spirale* passant par λ, que l'on peut identifier à un point de la courbe elliptique $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Un diviseur effectif de $\mathbf{E}_q$ (en abrégé, un *diviseur*) est une somme finie de spirales pondérées $\Lambda = \nu_1[\lambda_1] + \cdots + \nu_m[\lambda_m]$, où $\nu_i \in \mathbf{N}^*$ et où $[\lambda_i] \neq [\lambda_j]$ si $i \neq j$. Son support est la réunion des q-spirales $[\lambda_1], \ldots, [\lambda_m]$.

Dans [4] nous avons décrit en termes de modules aux q-différences filtrés et de *formes normales polynomiales* les invariants des classes analytiques isoformelles résolvant ainsi, suivant une approche de Birkhoff [1], le problème des modules pour ces classes. Nous résolvons ici ce problème en termes de q-analogues de la sommabilité et des multiplicateurs de Stokes des équations différentielles. Dans [7] et [5], est introduite une notion de développement asymptotique le long des q-spirales. Lorsqu'une équation aux q-différences non homogène admet 1 pour seule pente,

Adresses e-mail : ramis@math.ups-tlse.fr (J.-P. Ramis), sauloy@math.ups-tlse.fr (J. Sauloy), zhang@math.univ-lille1.fr (C. Zhang).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.01.019

à toute spirale générique correspond une et une seule solution méromorphe à pôles simples, asymptotique à une solution formelle donnée et possédant la spirale pour support de ses pôles. Cela nous conduit à la question suivante : existe-t-il des solutions méromorphes asymptotiques à diviseurs prescrits pour une équation analytique linéaire aux q-différences arbitraire ? Nous prouvons un résultat d'existence et d'unicité pour un choix convenable des diviseurs.

La notion de développement asymptotique évoquée plus haut est liée à une version q-analogue de la sommation de Borel–Laplace, d'où une notion de fonctions q-Borel sommables méromorphes sur $(\mathbf{C}^*, 0)$ à pôles simples sur une q-spirale. Une généralisation aux cas de fonctions q-multisommables [2,3] à diviseurs généraux, serait la bienvenue : nous ne savons définir un procédé explicite de sommation que pour des diviseurs très particuliers. Nous définirons ici des espaces de fonctions méromorphes à développements asymptotiques munies de diviseurs prescrits dans lesquels nos équations ont une unique solution. C'est la version asymptotique abstraite de la résolution algébrique de J. Sauloy [6]. Comme dans [7] et [5] et [6], un rôle essentiel est joué par la fonction thêta de Jacobi (avec ici un petit décalage d'indice ...) :

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{-n(n+1)/2} z^n = \prod_{n\in\mathbf{N}} \left(1 - q^{-n-1}\right)\left(1 + zq^{-n-1}\right)\left(1 + q^{-n}/z\right).$$

Introduisons les notations et la terminologie suivantes :

- Soient $|\Lambda| = \nu_1 + \cdots + \nu_m$ le *degré* du diviseur Λ et $\|\Lambda\| = (-1)^{|\Lambda|}\lambda_1^{\nu_1}\cdots\lambda_m^{\nu_m}$ son *poids* (défini modulo $q^{\mathbf{Z}}$). Si $z \in \mathbf{C}^*$, on note $d_q(z; [\lambda]) = \inf_{\xi\in[\lambda]} |1 - \frac{z}{\xi}|$ la *« distance » entre les spirales* $[z]$ et $[\lambda]$ et $d_q(z; \Lambda) = \inf_{1\leqslant i\leqslant m}\{d_q(z; [\lambda_i])\}^{\nu_i}$ la *distance de z au diviseur Λ*. On pose $\theta_\Lambda = \theta_{\lambda_1}^{\nu_1}\cdots\theta_{\lambda_m}^{\nu_m}$ où chaque θ_λ(“ = ”$\theta_{[\lambda]}$) désigne la fonction $z \mapsto \theta(-z/\lambda)$ analytique dans $\mathbf{C}^*$.
- Une fonction *analytique en* 0 *en dehors de* Λ est une fonction analytique dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ sauf éventuellement en 0 et sur le support de Λ. Une telle fonction f sera dite *bornée* (en 0) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K_\epsilon > 0$ tel qu'on ait $|f(z)| < K_\epsilon$ pour tout $z \neq 0$ de module suffisamment petit et vérifiant $d_q(z; \Lambda) > \epsilon$; on notera alors $f \in \mathbb{B}^\Lambda$.
- Soit $k \in \mathbf{R}$. Une suite (a_n) sera dite *q-Gevrey d'ordre k* si elle est majorée par une suite du type $(CA^n|q|^{kn^2/2})$ (pour $C, A > 0$ convenables) ; de même, une fonction sera dite *q-Gevrey d'ordre k* en 0 si elle est majorée par une fonction du type $C|z|^\mu(\theta(|z|))^k$ au voisinage de 0. L'anneau des germes de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) en 0 sera noté $\mathbf{C}\{z\}$ (resp. $\mathbf{C}\{z\}[z^{-1}]$).

2. Asymptotique subordonnée à un diviseur

Définition 2.1. Soient $\Lambda = \nu_1[\lambda_1] + \cdots + \nu_m[\lambda_m]$ et $f \in \mathbb{B}^\Lambda$. On notera $f \in \mathbb{A}^\Lambda_{q;|\Lambda|}$ et l'on dira que f admet un *développement asymptotique q-Gevrey d'ordre $|\Lambda|$ dans Λ en* 0, s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et des constantes $C > 0$, $A > 0$ telles que : pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier $N \geqslant 0$, on a :

$$\left| f(z) - \sum_{0\leqslant n<N} a_n z^n \right| < \frac{C}{\epsilon} A^N |q|^{N^2/(2|\Lambda|)} |z|^N,$$

pourvu que $0 < |z| < R$ pour un $R > 0$ suffisamment petit et que $d_q(z; \Lambda) > \epsilon$.

Notons que, si $\Lambda = [\lambda]$ et $f \in \mathbb{A}^{[\lambda]}_{q;1}$, alors les singularités près de 0 appartiennent toutes à la spirale $[\lambda]$, sont des pôles simples et leurs résidus forment une suite q-Gevrey d'ordre -1. Cela implique que la fonction $\theta_\lambda f$ admet une croissance au plus géométrique en 0 sur la spirale $[\lambda]$; voir [7,5].

Définition 2.2. Soit F une fonction analytique au voisinage de chacun des points du support de Λ près de 0. Les $|\Lambda|$ (germes à l'infini de) suites $\{(F^{(j)}(\lambda_i q^{-n}))_{n\gg 0}\colon\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j < \nu_i\}$, où $F^{(j)}$ est la j-ième dérivée de F, sont appelées *valeurs de F sur Λ en* 0 et notées $\Lambda F(0)$. On dira que F est *q-Gevrey d'ordre k dans Λ en* 0 si ses valeurs y sont toutes des suites q-Gevrey d'ordre k. On notera $F \in \mathbb{E}_0^\Lambda$ si F est analytique au voisinage de 0 épointé en 0, *q-Gevrey d'ordre $|\Lambda|$ en* 0 *et q-Gevrey d'ordre* 0 *dans Λ en* 0.

Théorème 2.3. *Soient $f \in \mathbb{B}^\Lambda$ et $F = \theta_\Lambda f$. Les assertions* (i) $f \in \mathbb{A}^\Lambda_{q;|\Lambda|}$ *et* (ii) $F \in \mathbb{E}_0^\Lambda$ *sont équivalentes entre elles et à l'assertion suivante :*

(iii) *Il existe* $|\Lambda|$ *suites* q*-Gevrey d'ordre* $-|\Lambda|$, $(\alpha_{i,j,n})_{n\gg 0}$ $(1\leqslant i\leqslant m,\ 0\leqslant j<\nu_i)$ *et une fonction* h *méromorphe en* $0\in\mathbf{C}$ *telles que* $f(z)=\sum_{n\gg 0}\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{0\leqslant j<\nu_i}\frac{\alpha_{i,j,n}}{(z-\lambda_i q^{-n})^{j+1}}+h(z)$.

3. Diviseurs relatifs et fonctions multisommables

Définition 3.1. Soient $\Lambda=\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\nu_i[\lambda_i]$ et $\Lambda'=\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\nu'_i[\lambda_i]$ deux diviseurs tels que $\Lambda'<\Lambda$, c'est-à-dire : $0\leqslant\nu'_i\leqslant\nu_i$, $\nu_i>0$ et $|\Lambda|>|\Lambda'|$. Soit F une fonction analytique au voisinage de chaque point du support de Λ près de 0. Les $|\Lambda|-|\Lambda'|$ (germes de) suites $\{(F^{(j)}(\lambda_i q^{-n}))_{n\gg 0}\colon\ 1\leqslant i\leqslant m,\ \nu'_i\leqslant j<\nu_i\}$ sont appellées *valeurs de* F *sur le diviseur relatif* Λ/Λ' *en* 0 et notées $(\Lambda/\Lambda')F(0)$. On dira que F *est* q*-Gevrey d'ordre* k *sur* Λ/Λ' *en* 0 si ses valeurs y sont toutes q-Gevrey d'ordre k. Soient $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda'=\Lambda_1$. On dira que $F\in\mathbb{E}^{\Lambda}_{(\Lambda_1,\Lambda_2)}$ si F est analytique au voisinage de 0 épointé en 0, q-Gevrey d'ordre $|\Lambda|$ en 0, q-Gevrey d'ordre $|\Lambda_2|$ sur Λ/Λ_2 en 0 et q-Gevrey d'ordre 0 sur Λ_2 en 0.

Dans ce cas, le Théorème 2.3 prend la forme suivante.

Proposition 3.2. *Soient* $\Lambda_1<\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$. *On a les décompositions suivantes* :

$$\mathbb{E}^{\Lambda}_{(\Lambda_1,\Lambda_2)}=\mathbb{E}^{\Lambda_2}_0+\theta_{\Lambda_2}\mathbb{E}^{\Lambda_1}_0,\qquad\left(\frac{1}{\theta_\Lambda}\mathbb{E}^{\Lambda}_{(\Lambda_1,\Lambda_2)}\right)\cap\mathbb{B}^{\Lambda}=\mathbb{A}^{\Lambda_1}_{q;|\Lambda_1|}+\frac{1}{\theta_{\Lambda_1}}\mathbb{A}^{\Lambda_2}_{q;|\Lambda_2|}.$$

Plus généralement, soient $\Lambda_1<\Lambda_1+\Lambda_2<\cdots<\Lambda_1+\Lambda_2+\cdots+\Lambda_m=\Lambda$; pour i allant de 1 à $m+1$, posons $\Lambda_{\geqslant i}=\sum_{j\geqslant i}\Lambda_j$, $\Lambda_{\leqslant i}=\sum_{j\leqslant i}\Lambda_j$; on notera $\Lambda_{\geqslant m+1}=\Lambda_{\leqslant 0}=\mathbf{0}$, $\Lambda_{\geqslant 0}=\Lambda_{\leqslant m}=\Lambda$, où $\mathbf{0}$ désigne le diviseur nul. Pour simplifier, on dira que $(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m)$ est une *partition ordonnée de* Λ.

Théorème 3.3. *Soit* $(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m)$ *une partition ordonnée de* Λ. *On définit* $\mathbb{E}^{\Lambda}_{(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m)}$ *comme étant l'ensemble des fonctions analytiques au voisinage de* 0 *épointé en* 0, q*-Gevrey d'ordre* $|\Lambda|$ *en* 0 *et, pour* i *allant de* 1 *à* m, q*-Gevrey d'ordre* $|\Lambda_{\geqslant i+1}|$ *sur* $\Lambda_{\geqslant i}/\Lambda_{\geqslant i+1}$ *en* 0. *Alors on a* :

$$\mathbb{E}^{\Lambda}_{(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m)}=\mathbb{E}^{\Lambda_m}_0+\theta_{\Lambda_{\geqslant m}}\mathbb{E}^{\Lambda_{m-1}}_0+\cdots+\theta_{\Lambda_{\geqslant 2}}\mathbb{E}^{\Lambda_1}_0.$$

Autrement dit, si l'on definit et note $\mathbb{O}^{\Lambda}_{(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m)}=(\frac{1}{\theta_\Lambda}\mathbb{E}^{\Lambda}_{(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m)})\cap\mathbb{B}^{\Lambda}$, *l'ensemble des* fonctions multisommables en 0 suivant la partition $(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m)$ *on a* :

$$\mathbb{O}^{\Lambda}_{(\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_m)}=\mathbb{A}^{\Lambda_1}_{q;|\Lambda_1|}+\frac{1}{\theta_{\Lambda_{\leqslant 1}}}\mathbb{A}^{\Lambda_2}_{q;|\Lambda_2|}+\cdots+\frac{1}{\theta_{\Lambda_{\leqslant m-1}}}\mathbb{A}^{\Lambda_m}_{q;|\Lambda_m|}.$$

4. Classification analytique des équations aux q-différences linéaires

Reprenons les notations de [4]. Soient K le corps des fractions de $\mathbf{C}\{z\}$, et $\widehat{K}$ celui de l'anneau $\mathbf{C}[[z]]$ des séries entières formelles. Soient $P_1,\ldots,P_k$ des modules purs de rangs $r_1,\ldots,r_k$ et de pentes entières $\mu_1>\cdots>\mu_k$. Soit $M_0=P_1\oplus\cdots\oplus P_k$, c'est un module de rang $n=r_1+\cdots+r_k$. Nous définissons l'ensemble $\mathcal{F}(M_0)$ des classes d'équivalence de couples (M,g) formés d'un module M et d'un isomorphisme $g:\mathrm{gr}(M)\to M_0$, deux couples (M,g), (M',g') étant dits équivalents s'il existe un isomorphisme $u:M\to M'$ avec $g=g'\circ\mathrm{gr}(u)$. On identifiera P_i à $(K^{r_i},\Phi_{z^{-\mu_i}A_i})$, où $A_i\in\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbf{C})$. La donnée d'un couple (M,g) revient alors à celle d'une matrice A sous la forme

$$A=\begin{pmatrix} z^{-\mu_1}A_1 & U_{12} & \cdots & U_{1k}\\ 0 & z^{-\mu_2}A_2 & \cdots & U_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & z^{-\mu_k}A_k\end{pmatrix}\tag{1}$$

où $A_i\in\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbf{C})$ et $U_{ij}\in\mathrm{Mat}_{r_i\times r_j}(K)$. Deux telles matrices A, A' sont équivalentes (resp. formellement équivalentes) s'il existe une matrice $F\in\mathfrak{G}(K)$ (resp. $\mathfrak{G}(\widehat{K})$) telle que $(\sigma_q F)A=A'F$. (On a noté $\mathfrak{G}$ le sous-groupe algébrique de GL_n formé des matrices triangulaires supérieures dont la diagonale est formée de blocs unité.) Soit

$A_0 = \mathrm{diag}(z^{-\mu_1}A_1, z^{-\mu_2}A_2, \ldots, z^{-\mu_k}A_k)$ la matrice diagonale par blocs formée de $z^{-\mu_1}A_1, z^{-\mu_2}A_2, \ldots, z^{-\mu_k}A_k$. Toute matrice A du type (1) est formellement équivalente à A_0, ce qui veut dire qu'il y a une seule classe isoformelle lorsque la diagonale A_0 est fixée. Dans [4], on a démontré que les classes analytiques attachées à cette classe isoformelle forment une variété de dimension $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}(r_i r_j)(\mu_i - \mu_j)$. En notant $\mathbf{C}[z]_{ij} = \bigoplus_{-\mu_i\leqslant \ell<-\mu_j}\mathbf{C}z^{\ell} \subset \mathbf{C}[z, z^{-1}]$, ces classes peuvent être représentées par l'ensemble des matrices A de la forme (1) dont les sous-matrices U_{ij} sont toutes à coefficients dans $\mathbf{C}[z]_{ij}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$; celui-ci sera noté $\mathcal{C}_{A_0}$.

Définition 4.1. Soit Λ un diviseur de degré $|\Lambda| = \mu_1 - \mu_k$. Une partition $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$ sera dite *compatible avec* A_0 si $m = k - 1$ et si pour i allant de 1 à $(k-1)$, $|\Lambda_i| = \mu_i - \mu_{i+1}$; lorsque c'est le cas, elle sera dite *générique pour* A_0 si, en plus, elle vérifie la condition suivante de non résonnance : $\|\Lambda_i\| \neq \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \bmod q^{\mathbf{Z}}$ quelles que soient les valeurs propres α_i de A_i et α_j de A_j, $j > i$.

Le théorème suivant précise un résultat de [6] (Théorème 3.7). Ici la solution « unique » $F = F_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{k-1})}$ est non seulement méromorphe, mais asymptotique à l'unique solution formelle $\widehat{F}$ (au sens du paragraphe 2). De plus ici la façon de la construire est différente [8]. (On pourra comparer en utilisant le dictionnaire suivant : « partition=summation divisor », « compatible=adapted », « générique=allowed ».)

Théorème 4.2 *(Sommabilité). Soient $A \in \mathcal{C}_{A_0}$, Λ un diviseur et $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{k-1})$ une partition générique de Λ pour A_0. Alors l'équation de conjugaison $(\sigma F)A_0 = A_1 F$ admet une unique solution $F = (F_{ij})$ avec : $F_{ii} = 1$, $F_{ij} \in \mathbb{O}_{\Lambda_i,\ldots,\Lambda_{j-1}}$, notée $F_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{k-1})}$.*

On en déduit une application $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{k-1}) \mapsto F_{(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{k-1})}$. Le phénomène de Stokes q-analogue se manifeste par l'existence de « sommes » différentes de $\widehat{F}$.

Théorème 4.3 *(Phénomène de Stokes). Dans le théorème précédent, on a $A = A_0$ si, et seulement si, cette application n'est pas, au sens évident, injective.*

Références

[1] G.D. Birkhoff, P.E. Guenther, Note on a canonical form for the linear q-difference system, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 27 (4) (1941) 218–222.

[2] B. Malgrange, J.-P. Ramis, Fonctions multisommables, Ann. Inst. Fourier 42 (1992) 353–368.

[3] F. Marotte, C. Zhang, Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, Ann. Inst. Fourier 50 (2000) 1859–1890.

[4] J.-P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang, La variété des classes analytiques d'équations aux q-différences dans une classe formelle, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 899–902.

[5] J.-P. Ramis, C. Zhang, Développements asymptotiques q-Gevrey et fonction thêta de Jacobi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 277–280.

[6] J. Sauloy, Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear q-difference equations, Astérisque 296 (2004) 227–251.

[7] C. Zhang, Une sommation discrète pour des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques : théorie générale et exemples, in : B.L.J. Braaksma (Ed.), Differential Equations and the Stokes Phenomenon, World Scientific, Singapore, 2002, pp. 309–329.

[8] C. Zhang, Solutions asymptotiques et méromorphes d'équations aux q-différences, in : Proceedings Théories Asymptotiques et Équations de Painlevé, confèrence à Angers, juin 2004, à paraître dans la serie "Seminaires et Congres" de la SMF.