Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 505–510
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique/Théorie des nombres

# Réalisation $\ell$-adique des motifs mixtes

Florian Ivorra

*Institut de mathématiques, université Paris 6, 175, rue du Chevaleret 75013 Paris, France*

Reçu le 14 septembre 2005 ; accepté après révision le 11 janvier 2006

Disponible sur Internet le 3 mars 2006

Présenté par Christophe Soulé

**Résumé**

Nous construisons un foncteur de réalisation $\ell$-adique à coefficients entiers pour les motifs mixtes géométriques de Voevodsky sur un schéma noethérien séparé et nous donnons dans certaines situations une variante modérée de ce foncteur. Nous montrons que notre construction coïncide avec le foncteur à coefficients rationnels construit par A. Huber pour les motifs mixtes géométriques sur un corps de caractéristique nulle plongeable dans $\mathbb{C}$. ***Pour citer cet article : F. Ivorra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***


**Abstract**

**$\ell$-adic realization of mixed motives.** We provide an integral $\ell$-adic realization functor for the geometrical mixed motives of Voevodsky over a noetherian separated scheme and derive in some case a moderate realization functor. We prove that our realization functor is the same up to isomorphism as the one constructed by A. Huber for rational mixed motives over a ground field of characteristic zero. ***To cite this article: F. Ivorra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***


## Abridged English version

In [9, Chapter 5], Voevodsky set out a construction of mixed motives over the spectrum of a perfect field. Using the general theory of relative cycles of [9, Chapter 2], it is possible to extend this construction to a noetherian separated scheme $S$. The triangulated category $DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S)$ of effective geometrical mixed motives is then the pseudo-Abelian hull of the quotient

$$\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmCor}_S)/E_{gm}$$

by the thick subcategory $E_{gm}$ generated by homotopy invariance and Nisnevich localization. As in the perfect field case, $\mathrm{SmCor}_S$ denotes the additive tensor category of smooth schemes of finite type over $S$ with finite correspondences as morphisms. According to the notation of [9, Chapter 2], finite correspondences from $X$ to $Y$ are given by the Abelian group $c_S(X,Y) = c_{\mathrm{equi}}(X \times_S Y/X, 0)$.

In this Note, we provide an $\ell$-adic realization functor for the triangulated tensor category $DM_{gm}(S)$ of geometrical mixed motives obtained from $DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S)$ by inverting the Tate motive. Our construction is based on a study of finite

*Adresse e-mail :* fivorra@math.jussieu.fr (F. Ivorra).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2006.01.014

correspondences from a local point of view. We prove the existence of a local decomposition of finite correspondences for the Nisnevich and étale topologies. Although we give only statements for the Nisnevich topology to keep this Note short, it is an easy matter to formulate the étale analog. The existence of these local transfers is proved by studying the sections over henselian local schemes of some specific Čech complex of Nisnevich sheaves with transfers. This allows us to provide transfers to the Godement resolution of a Nisnevich sheaf with transfers and then to achieve the construction of the realization functor. In [1] Deligne and Goncharov have given a description of certain realization functors by a similar approach.

By studying the behaviour of mixed motives under projective limits according to the general yoga of A. Grothendieck, we also derive a moderate version of the realization functor. Our last statement is devoted to the comparison with the $\ell$-adic component of the mixed realization functor constructed by Huber [5,6] for geometrical mixed motives over a field of characteristic zero.

## 1. Localisation des correspondances finies

Par convention tous les schémas apparaissant dans cette Note[1] sont noethériens séparés ou bien des réunions disjointes de tels schémas. Nous fixons un schéma $S$ et les seuls préfaisceaux que nous considérons sont les préfaisceaux de groupes abéliens sur la catégorie des $S$-schémas. Dans la suite, nous désignons par $\mathrm{Sm}_S$ la catégorie des $S$-schémas lisses de type fini et nous utilisons les catégories de coefficients $\ell$-adiques construites par Ekedahl dans [2].

Nous établissons dans cette section l'existence d'une décomposition locale des correspondances finies pour la topologie de Nisnevich. Étant donnés des $S$-schémas $X$ et $Y$, nous désignons par $X_x^{\mathfrak{h}}$ le schéma local hensélien spectre de l'hensélisé $\mathcal{O}_{X,x}^h$ de $X$ au point $x$, par $X^{\mathfrak{h}}$ la réunion disjointe de ces schémas et nous considérons les morphismes naturels

$$\mathfrak{l}_{X,x}^{\mathfrak{h}}: X_x^{\mathfrak{h}} \to X \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}}: (X\times Y)_e^{\mathfrak{h}} \to X_x^{\mathfrak{h}} \times Y_y^{\mathfrak{h}}$$

dans lesquels $e$ est un point du produit $X\times_S Y$ de projection $x$ et $y$. Pour un $X$-schéma $U$, nous introduisons le schéma simplicial de Čech dont les $n$-simplexes sont donnés par le produit fibré

$$U_X^{n+1} = \underbrace{U\times_X\cdots\times_X U}_{n+1 \text{ termes}}$$

la $i$-ème dégénérescence $\delta_i^n$ étant le morphisme de projection sur chaque facteur sauf le $i$-ème et la $i$-ème face $\sigma_i^n$ le morphisme induit par l'immersion diagonale sur le $i$-ème facteur. Ce schéma simplicial nous définit un complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts représentables

$$\check{C}_{U/X}: \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\big[U_X^{n+1}\big] \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\big[U_X^n\big] \to \cdots \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[X]$$

dont la différentielle est donnée par la somme alternée des morphismes induits par les dégénérescences. Le résultat essentiel assurant l'existence d'une décomposition locale et sa canonicité consiste en un raffinement de la Proposition 3.1.3 de [9, Chapter 5]. Plus précisément nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 1.1.** *Soient $X$ un $S$-schéma et $\mathcal{O}$ un $S$-schéma local hensélien. Il existe des morphismes canoniques*

$$\sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\mathfrak{h}}: \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\big[(X^{\mathfrak{h}})_X^n\big](\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\big[(X^{\mathfrak{h}})_X^{n+1}\big](\mathcal{O}), \quad n\geqslant 0,$$

*satisfaisant aux deux propriétés suivantes.*

(i) (*Homotopie*) *On a pour tout $n$ les relations* $d_{n+1}\circ\sigma_{\mathcal{O},X,n}^{\mathfrak{h}} + \sigma_{\mathcal{O},X,n-1}^{\mathfrak{h}}\circ d_n = \mathrm{id}$.

[1] Les démonstrations des résultats de cette Note sont disponibles dans la thèse de l'auteur [7].

(ii) (*Fonctorialité*) *Étant donnés un* $S$*-schéma local hensélien* $\mathcal{O}'$*, une correspondance finie* $\alpha \in c_S(\mathcal{O}', \mathcal{O})$*, on a un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\big[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\big](\mathcal{O}') \arrow[r, "\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[(X^{\mathfrak{h}})^n_X](\alpha)"] \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O}',X,n}"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\big[(X^{\mathfrak{h}})^n_X\big](\mathcal{O}) \arrow[d, "\sigma^{\mathfrak{h}}_{\mathcal{O},X,n}"] \\ \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\big[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\big](\mathcal{O}') \arrow[r, "\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X](\alpha)"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}\big[(X^{\mathfrak{h}})^{n+1}_X\big](\mathcal{O}). \end{tikzcd}$$

**Corollaire 1.2.** *Le complexe de faisceaux Nisnevich avec transferts* $\check{C}_{X^{\mathfrak{h}}/X}$ *est universellement exact au sens de Grayson* [3].

Supposons donnée une correspondance finie $\alpha \in c_S(X, Y)$ et un point $x$ de $X$. La Proposition 1.1 nous permet d'introduire la correspondance finie

$$\alpha_x := \sigma^{\mathfrak{h}}_{X^{\mathfrak{h}}_x, Y, 0}\big(\alpha \circ \big[\iota^{\mathfrak{h}}_{X,x}\big]\big) \in c_S\big(X^{\mathfrak{h}}_x, Y^{\mathfrak{h}}\big)$$

ainsi que sa composante $\alpha_{x,y}$ suivant le point $y$ dans la décomposition $c_S(X^{\mathfrak{h}}_x, Y^{\mathfrak{h}}) = \bigoplus_{y \in Y} c_S(X^{\mathfrak{h}}_x, Y^{\mathfrak{h}}_y)$. La proposition suivante résume les propriétés de ces correspondances locales.

**Proposition 1.3.** *Une correspondance finie* $\alpha \in c_S(X, Y)$ *se décompose localement sous la forme*

$$\alpha \circ \big[\iota^{\mathfrak{h}}_{X,x}\big] = \sum_{y \in Y} \big[\iota^{\mathfrak{h}}_{Y,y}\big] \circ \alpha_{x,y}.$$

*Ces décompositions possèdent les propriétés suivantes.*

(i) *Étant données des correspondances finies* $\alpha \in c_S(X, Y)$ *et* $\beta \in c_S(Y, Z)$*, on a pour tout point* $x \in X$ *et* $z \in Z$ *l'égalité*

$$(\beta \circ \alpha)_{x,z} = \sum_{y \in Y} \beta_{y,z} \circ \alpha_{x,y}.$$

(ii) *Soit* $g : X \to Y$ *un morphisme de* $S$*-schémas. En désignant par* $g^{\mathfrak{h}}_x : X^{\mathfrak{h}}_x \to Y^{\mathfrak{h}}_{g(x)}$ *le morphisme de schémas locaux henséliens déduit de* $g$*, on a*

$$[g]_{x,y} = \begin{cases} [g^{\mathfrak{h}}_x] & \text{si } y = g(x), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) *Étant donnée une correspondance finie* $\alpha \in c_S(X, Y)$*, on a l'égalité dans* $c_S(X^{\mathfrak{h}}_x, (Y^{\mathfrak{h}}_y)^{\mathfrak{h}}_z)$

$$(\alpha_{x,y})_{x,z} = \begin{cases} \alpha_{x,y} & \text{si } z = y, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*pour tout point* $x$ *de* $X$ *et tout point* $z$ *du schéma local hensélien* $Y^{\mathfrak{h}}_y$.

(iv) *Soient* $\alpha \in c_S(X, X')$ *et* $\beta \in c_S(Y, Y')$ *des correspondances finies. Pour tout point* $e$ *de* $X \times_S Y$ *et tout point* $x'$ *de* $X'$ *et* $y'$ *de* $Y'$*, on a l'égalité dans* $c_S((X \times_S Y)^{\mathfrak{h}}_e, (X')^{\mathfrak{h}}_{x'} \times_S (Y')^{\mathfrak{h}}_{y'})$

$$(\alpha_{x,x'} \otimes \beta_{y,y'}) \circ \big[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X,Y,e}\big] = \sum_{\substack{e' \text{point de } X' \times_S Y' \\ \text{se projetant sur } x' \text{ et } y'}} \big[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}_{X',Y',e'}\big] \circ (\alpha \otimes \beta)_{e,e'}.$$

## 2. Résolution de Godement et transferts

Rappelons qu'une monade dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un endofoncteur $M$ de $\mathcal{C}$ et de transformations naturelles $\mu : MM \to M$ et $\eta : \mathrm{id} \to M$ pour lesquelles les diagrammes

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta M"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & MM \arrow[d, "\mu"] & M \arrow[l, "M\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} MMM \arrow[r, "M\mu"] \arrow[d, "\mu M"'] & MM \arrow[d, "\mu"] \\ MM \arrow[r, "\mu"] & M \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Étant donnée une monade $(M, \mu, \eta)$, l'un des nombreux avatars de la construction bar permet d'associer à un objet $C$ de $\mathcal{C}$ un objet cosimplicial $B^*(M, C)$ de $\mathcal{C}$ muni d'une coaugmentation de $C$ dans ce dernier. Les $n$-cosimplexes sont donnés par l'objet $M^{n+1}C$ de $\mathcal{C}$, les codégénérescences par les morphismes $\sigma_i^n := M^i \mu M^{n-1-i}$ avec $i = 0, \ldots, n-1$ et les cofaces par les morphismes $\delta_i^{n-1} := M^i \eta M^{n-i}$ avec $i = 0, \ldots, n$.

Nous désignons par $\mathcal{N}$ la catégorie des faisceaux Nisnevich et par $\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}$ celle des faisceaux Nisnevich avec transferts. La monade de Godement est la monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}$ de la catégorie des faisceaux Nisnevich de groupes abéliens donnée par

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X) = \prod_{x \in X} F\big(X_x^{\mathfrak{h}}\big)$$

pour $F \in \mathcal{N}$. Nous notons $s_x$ la composante suivant le point $x$ d'une section $s$ de $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F$ sur $X$. Le morphisme structural $\eta_F$ se trouve alors donné par $\eta_F(s)_x = F(\iota_{X,x}^{\mathfrak{h}})(s)$ pour un élément $s$ de $F(X)$. Les sections sur $X$ du faisceau $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F$ s'identifient au produit

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X) = \prod_{x \in X} \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F\big(X_x^{\mathfrak{h}}\big) = \prod_{x \in X} \prod_{z \in X_x^{\mathfrak{h}}} F\big(\big(X_x^{\mathfrak{h}}\big)_z^{\mathfrak{h}}\big)$$

et le morphisme structural $\mu_F$ coïncide avec la projection sur les composantes associées aux points fermés des $X_x^{\mathfrak{h}}$. La résolution cosimpliciale de Godement d'un faisceau Nisnevich de groupes abéliens $F$ est par définition le faisceau cosimplicial de groupes abéliens $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^* F = B^*(\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}, F)$. Lorsque $F$ est un faisceau Nisnevich avec transferts, il résulte de la Proposition 1.3 que $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F$ est le faisceau Nisnevich sous-jacent d'un faisceau Nisnevich avec transferts $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}} F$ dont les transferts sont donnés par

$$\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}} F(\alpha)(s)_x = \sum_{y \in Y} F(\alpha_{x,y})(s_y)$$

pour une correspondance finie $\alpha \in c_S(X, Y)$ et une section $s$ de $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(Y)$. Les morphismes structuraux étant compatible aux transferts, cela nous donne la

**Proposition 2.1.** *La monade de Godement $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}$ sur $\mathcal{N}$ induit une monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}$ sur la catégorie $\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}$ des faisceaux Nisnevich avec transferts.*

En particulier il résulte de la proposition précédente que la résolution cosimpliciale de Godement d'un faisceau Nisnevich avec transferts $F$ est canoniquement munie de transferts puisque donnée par le faisceau avec transferts cosimplicial $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr},*} F = B^*(\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}, F)$. Nous appelons faisceau Nisnevich (resp. avec transferts) quasi-monoïdal symétrique, la donnée d'un objet $F \in \mathcal{N}$ (resp. $F \in \mathcal{N}^{\mathrm{tr}}$) et pour tout $S$-schéma $X$ et $Y$ de morphismes associatifs et symétriques

$$\boxtimes_{X,Y}^F : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \times_S Y)$$

fonctoriels par rapport aux morphismes de schémas (resp. aux correspondances finies). Ces derniers sont les objets d'une sous-catégorie non pleine $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{N}$ (resp. une sous-catégorie non pleine $\mathcal{Q}^{\mathrm{tr}}$ de $\mathcal{N}^{\mathrm{tr}}$). La résolution de Godement possède une structure multiplicative naturelle, ce qui se traduit par le fait que $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}$ induit une monade sur la catégorie $\mathcal{Q}$. Étant donné $F \in \mathcal{Q}$, les morphismes structuraux

$$\boxtimes_{X,Y}^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F} : \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X) \otimes \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(Y) \to \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X \times_S Y)$$

sont donnés pour $s \in \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(X)$ et $t \in \mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F(Y)$ par les relations

$$\left[\boxtimes_{X,Y}^{\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}} F}(s \otimes t)\right]_e = F\left(\mathfrak{m}_{X,Y,e}^{\mathfrak{h}}\right)\left[\boxtimes_{X_x^{\mathfrak{h}},Y_y^{\mathfrak{h}}}^{F}(s_x \otimes t_y)\right]$$

dans lesquelles $e$ désigne un point du produit $X \times_S Y$ de projection $x$ et $y$. En utilisant les propriétés de la décomposition locale, on voit que cette structure multiplicative est compatible aux transferts.

**Lemme 2.2.** *La monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr}}$ induit une monade sur $\mathcal{Q}^{\mathrm{tr}}$ compatible par le foncteur d'oubli avec la monade induite par $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}$ sur $\mathcal{Q}$.*

En particulier on voit que pour $F \in \mathcal{Q}^{\mathrm{tr}}$, la résolution cosimpliciale de Godement $\mathcal{G}_{\mathrm{Nis}}^{\mathrm{tr},*} F$ appartient à $\Delta\mathcal{Q}^{\mathrm{tr}}$.

## 3. Réalisations $\ell$-adiques des motifs mixtes géométriques

Nous nous intéressons maintenant à l'extension aux motifs mixtes du foncteur de réalisation $\ell$-adique des $S$-schémas lisses de type fini. Ce dernier n'est autre que le foncteur symétrique quasi-monoïdal

$$R_\ell : \mathrm{Sm}_S^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell); \qquad X \mapsto R\pi_{X*}\pi_X^*\mathbb{Z}_S/\ell^* \tag{1}$$

dans lequel $\pi_X$ désigne le morphisme structural de $X$ et $\mathbb{Z}_S/\ell^*$ le faisceau étale $\ell$-adique sur $S$ donné par le système projectif $\cdots \to \mathbb{Z}_S/\ell^r \to \cdots \to \mathbb{Z}_S/\ell$. Notre résultat principal dans cette Note est le théorème suivant dont la démonstration repose sur les résultats de la Section 2 ainsi que les propriétés de la h-topologie démontrées dans [8,10].

**Théorème 3.1.** *Le foncteur* (1) *se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé quasi-tensoriel*

$$R_\ell : DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell).$$

*Lorsque $S$ est de type fini sur un schéma noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$, le foncteur précédent prend ses valeurs dans $\mathrm{D}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(S, \mathbb{Z}_\ell)$.*

Pour obtenir une variante modérée du théorème précédent nous utilisons la proposition suivante qui généralise aux motifs mixtes une propriété de commutation aux limites projectives classique pour les $S$-schémas lisses de type fini.

**Proposition 3.2.** *Nous supposons que le schéma $S$ est régulier et limite projective d'un système projectif filtrant de schémas réguliers $\lambda \mapsto S_\lambda$ dont les morphismes de transition sont plats et affines. On a alors des équivalences de catégories canoniques*

$$DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S) = 2\text{-}\operatorname{colim}_\lambda DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(S_\lambda), \qquad DM_{gm}(S) = 2\text{-}\operatorname{colim}_\lambda DM_{gm}(S_\lambda).$$

Les catégories de coefficients $\ell$-adiques de [2] ne vérifient pas cette propriété de commutation aux limites projectives. Il y a donc lieu d'introduire les catégories triangulées tensorielles

$$\mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md} := 2\text{-}\operatorname{colim}_\lambda \mathrm{D}^+(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell), \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md} := 2\text{-}\operatorname{colim}_\lambda \mathrm{D}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell).$$

Ces dernières sont de nature plus arithmétique que les catégories originales. Nous sommes en mesure de raffiner le Théorème 3.1 lorsque l'on se place sous l'hypothèse supplémentaire suivante : le schéma $S$ est régulier et limite projective d'un système projectif filtrant de schémas réguliers $\lambda \mapsto S_\lambda$ dont les morphismes de transition sont lisses et affines. Nous disposons dans ce cas du foncteur de réalisation $\ell$-adique modérée

$$\mathrm{Sm}_S^{\mathrm{op}} = 2\text{-}\operatorname{colim}_\lambda \mathrm{Sm}_{S_\lambda}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{2\text{-}\operatorname{colim}_\lambda R_\ell} 2\text{-}\operatorname{colim}_\lambda \mathrm{D}^+(S_\lambda, \mathbb{Z}_\ell) = \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}. \tag{2}$$

Sous les hypothèses précédentes, la conjonction de la Proposition 3.2 et du Théorème 3.1 nous donne la variante modérée ci-dessous du foncteur de réalisation.

**Proposition 3.3.** *Le foncteur* (2) *se prolonge canoniquement en un foncteur triangulé quasi-tensoriel*

$$R_{md,\ell} : DM_{gm}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}.$$

*Lorsque $\lambda \mapsto S_\lambda$ est un système projectif de schémas de type fini sur un schéma nothérien régulier de dimension $\leqslant 1$, le foncteur précédent prend ses valeurs dans $\mathrm{D}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(S, \mathbb{Z}_\ell)_{md}$.*

Soit $k$ un corps de caractéristique nulle plongeable dans $\mathbb{C}$. Dans [5,6], Huber a construit un foncteur de réalisation prenant ses valeurs dans la catégorie triangulée tensorielle $\mathrm{D}_{\mathcal{MR}}$ des réalisations mixtes de [4]

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}} : DM_{gm}(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}_{\mathcal{MR}}. \tag{3}$$

Notre construction coïncide avec la composante $\ell$-adique de ce foncteur et nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 3.4.** *Soit $k$ un corps de caractéristique nulle plongeable dans $\mathbb{C}$. La composante $\ell$-adique du foncteur* (3) *construit par Huber dans* [5,6] *est canoniquement isomorphe au foncteur de réalisation obtenu au Théorème* 3.1 : *il existe un isomorphisme canonique de foncteurs $\phi$*

$$\begin{tikzcd}
DM_{gm}(k)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}"] \arrow[dr, bend right, "R_\ell"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & \mathrm{D}_{\mathcal{MR}} \arrow[d, "\text{Projection sur la composante } \ell\text{-adique}"] \\
& \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}\big(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell\big).
\end{tikzcd}$$

La démonstration de la proposition précédente se ramène essentiellement après un « dévissage » à certaines propriétés d'invariance sous Galois de la résolution de Godement.

## Remerciements

Je remercie Bruno Kahn et Marc Levine pour les discussions que nous avons eues au sujet des résultats de cette Note.

## Références

[1] P. Deligne, A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (1) (2005) 1–56.
[2] T. Ekedahl, On the adic formalism, in: The Grothendieck Festschrift, vol. II, in: Progr. Math., vol. 87, Birkäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 197–218.
[3] D.R. Grayson, Universal exactness in algebraic $K$-theory, J. Pure Appl. Algebra 36 (2) (1985) 139–141.
[4] A. Huber, Mixed Motives and their Realization in Derived Categories, Lecture Notes in Math., vol. 1604, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
[5] A. Huber, Realization of Voevodsky's motives, J. Algebraic Geom. 9 (4) (2000) 755–799.
[6] A. Huber, Corrigendum to "Realization of Voevodsky's motives", J. Algebraic Geom. 13 (1) (2004) 195–207.
[7] F. Ivorra, Réalisation $\ell$-adique des motifs mixtes, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 2005, http://www.institut.math.jussieu.fr/theses/2005/fivorra/.
[8] A. Suslin, V. Voevodsky, Singular homology of abstract algebraic varieties, Invent. Math. 123 (1) (1996) 61–94.
[9] V. Voevodsky, A. Suslin, E. Friedlander, Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.
[10] V. Voevodsky, Homology of schemes, Selecta Math. (N.S.) 2 (1) (1996) 111–153.