Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 349–352
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse numérique

Estimation de l'erreur pour l'interpolation par des splines de type plaque mince sous tension

Abderrahman Bouhamidi

L.M.P.A., université du littoral côte d'opale, 50, rue F. Buisson, BP699, 62228 Calais cedex, France

Reçu le 21 mars 2005 ; accepté après révision le 19 décembre 2005

Disponible sur Internet le 18 janvier 2006

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

On donne une estimation de l'erreur en norme L^p pour l'interpolation par des fonctions splines sous tension et on établit un résultat de convergence dans l'espace de Sobolev classique. ***Pour citer cet article : A. Bouhamidi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Error estimates for interpolating thin plate splines under tension. In this Note, we give some results on the L_p-error estimates and convergence in the Sobolev space for the interpolation by thin splines under tension. ***To cite this article: A. Bouhamidi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Interpolation par splines sous tension

Le concept des courbes splines sous tension a été introduit par Schweikert [10]. Sa généralisation aux fonctions à deux variables a été donnée, d'une façon empirique, par Franke [6]. L'étude des splines sous tension dans un cadre d'espaces fonctionnels « de type Sobolev » a été faite dans [2]. Soient $m, d > 0$ deux entiers positifs. On considère l'espace $X^m(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ for } |\alpha| = m, m+1\}$, où $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est l'espace classique des distributions sur $\mathbb{R}^d$ et D^α désigne la dérivée partielle

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} u.$$

On munit l'espace $X^m(\mathbb{R}^d)$ du semi-produit scalaire suivant

$$(u|v)_{m,\tau,\mathbb{R}^d} = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x + \tau^2 \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Adresse e-mail : A.Bouhamidi@lmpa.univ-littoral.fr (A. Bouhamidi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.12.027

La semi-norme associée au semi-produit scalaire (1) est notée $|u|_{m,\tau,\mathbb{R}^d} = \sqrt{(u|u)_{m,\tau,\mathbb{R}^d}}$. Le paramètre $\tau > 0$, appelé paramètre de tension, donne un compromis entre les deux splines d'ordre $m+1$ et m. L'expérience numérique montre que lorsque le paramètre τ devient de plus en plus grand la spline sous tension tend vers la spline pseudo-linéaire et lorsque au contraire ce paramètre devient de plus en plus petit alors la spline sous tension tend vers la spline pseudo-cubique [1,3].

Sous l'hypothèse $m > \frac{d}{2}$, l'espace $X^m(\mathbb{R}^d)$ muni du semi-produit scalaire (1) et de sa semi-norme associée est en fait un sous-espace semi-Hilbertien de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à injection continue [2]. Le noyau de la semi-norme associée à (1) est l'espace des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^d$ de degré $\leqslant m-1$ noté ici $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ de dimension notée $d(m) := \frac{(d+m-1)!}{d!(m-1)!}$.

Soient Ω un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{A} := \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \Omega$ un ensemble fini de N points deux à deux distintcs avec $N \geqslant d(m)$. On suppose que $\mathcal{A}$ contient un sous-ensemble $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$-unisolvent. Cela est equivalent au fait que chaque polynôme de $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$ qui s'annule sur $\mathcal{A}$ est identiquement nul.

Soient Δ^m l'opérateur de Laplace itéré d'ordre m et δ la mesure de Dirac à l'origine. On rappelle qu'une solution élémentaire (ou fondamentale) de l'opérateur différentiel $(-1)^{m+1}(\Delta^{m+1} - \tau^2\Delta^m)$ est une distribution tempérée $\Phi_{m,d}$ sur $\mathbb{R}^d$ générée par une fonction encore notée $\Phi_{m,d}$, telle que

$$(-1)^{m+1}\big(\Delta^{m+1}\Phi_{m,d} - \tau^2\Delta^m\Phi_{m,d}\big) = \delta.$$

Pour $d = 1, 2, 3$ une solution élémentaire $\Phi_{m,d}$ a pour expression (cf. [2,4])

$$\Phi_{m,d}(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{2\tau^{2m+1}}\left(\mathrm{e}^{-\tau|x|} - \displaystyle\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-\tau|x|)^k}{k!}\right) & \text{pour } d = 1, \\ \dfrac{(-1)^m}{2\pi\tau^{2m}}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\tau^{2k}}{4^k(k!)^2}|x|^{2k}\ln\big(|x|\big) + K_0\big(\tau|x|\big)\right) & \text{pour } d = 2, \\ \dfrac{(-1)^m}{4\pi\tau^{2m}|x|}\left(\mathrm{e}^{-\tau|x|} - \displaystyle\sum_{k=0}^{2m-2}\frac{(-\tau|x|)^k}{k!}\right) & \text{pour } d = 3, \end{cases} \tag{2}$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^d$ et K_0 désigne la fonction de Bessel de seconde espèce.

Soit f une fonction définie sur Ω. Le problème variationnel suivant

$$\operatorname*{Min}_{\substack{u_{|\mathcal{A}}=f \\ u\in X^m(\mathbb{R}^d)}} |u|_{m,\tau,\mathbb{R}^d}, \tag{3}$$

a une solution unique notée $f^{\mathcal{A}}$ qui s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$f^{\mathcal{A}}(x) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\Phi_{m,d}(x - x_i) + \sum_{j=1}^{d(m)}\alpha_j q_j(x), \tag{4}$$

où $(q_1, \ldots, q_{d(m)})$ est une base de l'espace $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$. Les coefficients λ_i et α_j donnés dans (4) sont calculés par résolution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} K & M^{\mathrm{T}} \\ M & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$$

où λ, α et z sont les vecteurs donnés par $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)^{\mathrm{T}}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d(m)})^{\mathrm{T}}$ et $z = (f(x_1), \ldots, f(x_N))^{\mathrm{T}}$, K est la matrice de taille $N \times N$ donnée par $K = (\Phi_{m,d}(x_i - x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant N}$, M^{T} est la transposée de la matrice M de taille $d(m) \times N$ donnée par $M = (q_i(x_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant d(m)\\ 1\leqslant j\leqslant N}}$ et O est la matrice nulle de taille $d(m) \times d(m)$.

2. Estimation de l'erreur et convergence

Dans cette partie, on propose des résultats sur l'estimation de l'erreur. On suppose que la dimension de l'espace est $d \geqslant 2$. On suppose que Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^d$. On considère la semi-norme $|\cdot|_{m,\tau,\Omega}$ définie sur l'espace de Sobolev $H^{m+1}(\Omega) = W^{m+1,2}(\Omega)$, associée au semi-produit scalaire suivant

$$(f|g)_{m,\tau,\Omega} = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x + \tau^2 \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

La proposition suivante a été donnée dans [7,8]

Proposition 2.1. *Soient Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^d$ et R_Ω désigne l'opérateur des restrictions à Ω, alors $R_\Omega(X^m(\mathbb{R}^d)) = R_\Omega(H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$. De plus, si Ω est à frontière lipschitzienne (au sens de Nečas* [9]*), alors l'opérateur R_Ω est linéaire et continu de $X^m(\mathbb{R}^d)$ sur $H^{m+1}(\Omega)$.*

On donne alors la proposition suivante

Proposition 2.2. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ à frontière lipschitzienne (au sens de Nečas* [9]*) et contenant un sous-ensemble Π_{m-1}-unisolvent. Pour toute fonction $f \in H^{m+1}(\Omega)$, le problème variationnel*

$$\operatorname*{Min}_{\substack{u\in X^m(\mathbb{R}^d)\\ u_{|\Omega}=f}} |u|_{m,\tau,\mathbb{R}^d}, \tag{6}$$

a une solution unique f^Ω, et on a $|f^\Omega|^2_{m,\tau,\mathbb{R}^d} = |f^{\mathcal{A}}|^2_{m,\tau,\mathbb{R}^d} + |f^\Omega - f^{\mathcal{A}}|^2_{m,\tau,\mathbb{R}^d}$, où $f^{\mathcal{A}}$ est la solution du problème variationnel (3)*. De plus, il existe une constante K (dépendant de m et Ω) tel que*

$$\left|f^\Omega\right|_{m,\tau,\mathbb{R}^d} \leqslant K|f|_{m,\tau,\Omega}, \quad \forall f \in H^{m+1}(\Omega).$$

On donne le théorème suivant sur l'estimation locale de l'erreur

Théorème 2.3. *Pour tout $M \geqslant 1$, pour tout $p \in [2,\infty]$ et pour tout multi-indice α tels que $|\alpha| \leqslant m - \frac{d}{2} + \frac{d}{p}$, il existe $R > 0$ (dépendant de d et m) et il existe $C > 0$ (dépendant de M, R, d, m, α, p et τ) tels que pour tout $h > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ la boule $B(t, Rh)$ de centre t et de rayon Rh contient $d(m)$ boules $B_1, \ldots, B_{d(m)}$ centrées à l'origine et de rayon h telles que*

$$\left\|D^\alpha u\right\|_{L^p(B(t,MRh))} \leqslant C h^{m-|\alpha|-\frac{d}{2}+\frac{d}{p}} |u|_{m,\tau,B(t,MRh)},$$

pour tout $u \in W^{m+1,2}(B(t, MRh))$ qui s'annule au moins en un point de chaque boule $B_1, \ldots, B_{d(m)}$.

La propriété du cône intérieur est définie comme suit

Définition 2.4. On dit qu'un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^d$ a la propriété du cône intérieur de rayon $r > 0$ et d'angle $\theta \in (0, \pi/2)$ si pour tout $t \in \Omega$ il existe un vecteur unitaire $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$ tel que le cône $C(t, \xi(t), \theta, r) = \{t + \lambda\eta;\ \eta \in \mathbb{R}^d, |\eta| = 1, \eta^{\mathrm{T}} \cdot \xi(t) \geqslant \cos\theta,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant r\}$ est entièrement contenu dans Ω.

La proposition suivante est due à Duchon [5],

Proposition 2.5 (Duchon [5]). *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ vérifiant la propriété du cône intérieur de rayon $r > 0$ et d'angle θ, alors il existe deux constantes M et M_1 (dépendant de d et de θ) et ε_0 (dépendant de θ et r) tels que, pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ il existe $T_\varepsilon \subset \Omega$ vérifiant*

$$\text{(i) } B(t,\varepsilon) \subset \Omega \quad \textit{pour tout } t \in T_\varepsilon, \quad \text{(ii) } \Omega \subset \bigcup_{t\in T_\varepsilon} B(t, M\varepsilon), \quad \text{(iii) } \sum_{t\in T_\varepsilon} 1_{B(t,M\varepsilon)} \leqslant M_1,$$

où $B(t,R)$ désigne la boule fermée de centre t et de rayon R et 1_E est la fonction indicatrice de l'ensemble E.

Remarquons que la condition (iii) signifie que tout point t de Ω appartient à au plus M_1 boules $B(t, M_1\varepsilon)$ centrées sur T_ε.

A partir de l'estimation locale de l'erreur, en s'appuyant sur le fait que Ω possède la propriété du cône et grâce à la Proposition 2.5, on montre alors un résultat sur l'estimation globale de l'erreur ennoncé dans le théorème suivant

Théorème 2.6. *Soit Ω un ouvert borné convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ à frontière lipschitzienne. Soit m un entier avec $m > d/2$, alors il existe $h_0 > 0$ (dépendant de Ω, m et d) tel que pour tout $p \in [2, \infty]$ et pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leqslant m - \frac{d}{2} + \frac{d}{p}$, il existe une constante C (dépendant de Ω, d, m, α et p) et une constante K (dépendant de Ω et m) telles que pour toute fonction f appartenant à $H^{m+1}(\Omega)$ et pour tout ensemble fini $\mathcal{A} \subset \overline{\Omega}$ contenant un sous-ensemble $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$-unisolvent et vérifiant $h = \sup_{t\in\overline{\Omega}} \inf_{a\in\mathcal{A}} |t - a| \leqslant h_0$, on a*

$$\begin{aligned}\left\| D^\alpha\left(f - f^{\mathcal{A}}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} &\leqslant C h^{m-|\alpha|-\frac{d}{2}+\frac{d}{p}} \left| f^\Omega - f^{\mathcal{A}}\right|_{m,\tau,\mathbb{R}^d} \\ &\leqslant CK h^{m-|\alpha|-\frac{d}{2}+\frac{d}{p}} |f|_{m,\tau,\Omega}.\end{aligned}$$

L'influence sur les résultats d'estimation de l'erreur du paramètre τ apparaît dans le terme $|f|_{m,\tau,\Omega}$. Le corollaire suivant traduit un résultat de convergence

Corollaire 2.7. *Soit Ω un ouvert borné convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ à frontière lipschitzienne. Soit m un entier $> d/2$, soit α un multi-indice et $p \in [2, \infty]$ tels que $|\alpha| \leqslant m - \frac{d}{2} + \frac{d}{p}$. Pour toute fonction $f \in H^{m+1}(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout ensemble fini $\mathcal{A} \subset \overline{\Omega}$ contenant un sous-ensemble $\Pi_{m-1}(\mathbb{R}^d)$-unisolvent et vérifiant $h = \sup_{t\in\overline{\Omega}} \inf_{a\in\mathcal{A}} |t - a| \leqslant h_0$, on a*

$$\left\| D^\alpha\left(f - f^{\mathcal{A}}\right)\right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon h^{m-|\alpha|-\frac{d}{2}+\frac{d}{p}}.$$

Références

[1] A. Bouhamidi, A. Le Méhauté, Spline curves and surfaces with tension, in: P.J. Laurent, A. Le Méhauté, L.L. Schumaker (Eds.), Wavelets, Images, and Surface Fitting, A.K. Peters, Wellesley, 1994, pp. 51–58.

[2] A. Bouhamidi, A. Le Méhauté, Multivariate interpolating (m, ℓ, s)-splines, Adv. Comput. Math. 11 (1999) 287–314.

[3] A. Bouhamidi, Hilbertian approach for univariate splines with tension, Anal. Theory Appl. 17 (4) (2001) 36–57.

[4] F. Derrien, Distribution de type conditionnel et fonctions-spline, Thèse de l'Université de Nantes, 1997.

[5] J. Duchon, Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les D^m-spline, RAIRO Anal. Numér. 12 (4) (1978) 325–334.

[6] R. Franke, Thin plate splines with tension, Comput. Aided Geom. Design 2 (1985) 87–95.

[7] M.C. López de Silanes, Convergence and error estimates for (m, ℓ, s)-splines, J. Comput. Appl. Math. 87 (1997) 373–384.

[8] M.C. López de Silanes, R. Arcangéli, Estimations de l'erreur d'approximation par splines d'interpolation et d'ajustement d'ordre (m, s), Numer. Math. 56 (1989) 449–467.

[9] J. Nečas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967.

[10] D.G. Schweikert, An interpolation curve using a spline in tension, J. Math. Phys. 45 (1966) 312–317.