Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 325–328
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Classes de Hirzebruch et classes de Chern motiviques

Jean-Paul Brasselet [a], Jörg Schürmann [b], Shoji Yokura [c,1]

[a] *IML, case 907, Luminy, 13288 Marseille cedex 9, France*
[b] *Westf. Wilhelms-Universität, SFB 478 "Geometrische Strukturen in der Mathematik", Hittorfstr. 27, 48149 Münster, Allemagne*
[c] *Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, University of Kagoshima, 21-35 Korimoto 1-chome, Kagoshima 890-0065, Japon*

Reçu le 30 septembre 2004 ; accepté après révision le 21 décembre 2005

Disponible sur Internet le 18 janvier 2006

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Étant donnée une variété algébrique complexe X, nous introduisons de nouvelles théories de classes caractéristiques, définies sur le groupe de Grothendieck relatif des variétés algébriques complexes sur X, construit et étudié par Looijenga et Bittner dans le cadre de l'intégration motivique. L'une d'entre elles T_y est une version homologique de la mesure motivique et généralise la caractéristique d'Hirzebruch correspondante. Elle unifie la transformation de Chern de Schwartz–MacPherson, la transformation de Todd de Baum–Fulton–MacPherson et la transformation de L-classe de Cappell–Shaneson. ***Pour citer cet article : J.-P. Brasselet et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Hirzebruch classes and motivic Chern classes. Let X be a complex algebraic variety. We define and study new theories of characteristic classes, defined on the relative Grothendieck group of complex algebraic varieties over X as introduced and studied by Looijenga and Bittner in relation to motivic integration. One of them, T_y is a homology class version of the motivic measure and generalizes the corresponding Hirzebruch characteristic. It unifies the Chern class transformation of Schwartz and MacPherson, the Todd class transformation of Baum–Fulton–MacPherson and the L-class transformation of Cappell–Shaneson. ***To cite this article: J.-P. Brasselet et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Théorie classique

Afin de fixer les notations et le contexte de nos résultats, rappelons tout d'abord le théorème d'Hirzebruch–Riemann–Roch généralisé [7]. On considère une variété projective complexe lisse X et un fibré vectoriel holomorphe E sur X. La χ_y-caractéristique de E est définie par :

Adresses e-mail : jpb@iml.univ-mrs.fr (J.-P. Brasselet), jschuerm@math.uni-muenster.de (J. Schürmann), yokura@sci.kagoshima-u.ac.jp (S. Yokura).

[1] Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 17540088), the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT), Japan.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.12.022

$$\chi_y(X,E) := \sum_{p\geqslant 0} \chi\big(X, E\otimes \wedge^p T^*X\big)\cdot y^p = \sum_{p\geqslant 0}\bigg(\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i \dim_C H^i\big(X, E\otimes\wedge^p T^*X\big)\bigg)\cdot y^p,$$

où T^*X désigne le fibré cotangent holomorphe de X. Alors, on a

$$\chi_y(X,E) = \int_X \widetilde{td_{(y)}}(TX)\cdot ch_{(1+y)}(E)\cap[X] \in \mathbb{Q}[y],$$

où

$$\widetilde{td_{(y)}}(TX) := \prod_{i=1}^{\dim X} Q_y(\alpha_i) \quad \text{et} \quad ch_{(1+y)}(E) := \sum_{j=1}^{rkE} \mathrm{e}^{\beta_j(1+y)}.$$

Ici, les α_i sont les racines de Chern du fibré tangent TX et les β_j sont les racines de Chern de E, enfin, $Q_y(\alpha)$ est la série normalisée

$$Q_y(\alpha) := \frac{\alpha(1+y)}{1-\mathrm{e}^{-\alpha(1+y)}} - \alpha y \in \mathbb{Q}[y][[\alpha]],$$

laquelle est égale à $1+\alpha$ pour $y=-1$, à $\frac{\alpha}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$ pour $y=0$ et à $\frac{\alpha}{\tanh(\alpha)}$ pour $y=1$.

La classe de Todd modifiée $\widetilde{td_{(y)}}(TX)$ coïncide donc avec la classe totale de Chern $c^*(TX)$, pour $y=-1$, avec la classe totale de Todd $td^*(TX)$, pour $y=0$, et avec la L-classe totale de Thom–Hirzebruch $L^*(TX)$, pour $y=1$.

Dans toute la suite X désignera une variété algébrique complexe réduite et les groupes d'homologie $H_*(X)$ désigneront ou les groupes de Chow ou les groupes d'homologie de Borel–Moore. On remarquera cependant que les constructions suivantes peuvent être faites dans un cadre plus général d'un corps de base k de caractéristique zéro.

Notons $G_0(X)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur X. L'homomorphisme de groupes

$$td_{(1+y)} : G_0(X)\otimes\mathbb{Z}[y] \longrightarrow H_*(X)\otimes\mathbb{Q}\big[y,(1+y)^{-1}\big]; \quad td_{(1+y)}\big([\mathcal{F}]\big) := \sum_{i\geqslant 0} td_i\big([\mathcal{F}]\big)\cdot(1+y)^{-i},$$

où td_i est la composante de degré i de la transformation de Todd td_* (voir [1]) linéairement étendue sur $\mathbb{Z}[y]$, commute aux images directes propres. Par [10], on a :

Lemme 1.1. *Si X est lisse de dimension pure, on a*

$$td_{(1+y)}\big(\lambda_y(T^*X)\cap[\mathcal{O}_X]\big) = \widetilde{td_{(y)}}(TX)\cap[X] \in H_*(X)\otimes\mathbb{Q}[y].$$

Ici $\lambda_y : K^0(X)\to K^0(X)\otimes\mathbb{Z}[[y]]$ est la λ-classe totale sur le groupe de Grothendieck $K^0(X)$ des faisceaux cohérents localement libres sur X [6] et le cap-produit $\cap[\mathcal{O}_X] : K^0(X)\to G_0(X)$ est un isomorphisme (X est lisse).

2. Les classes motiviques

Soit $K_0(\mathrm{var}/X)$ le groupe de Grothendieck relatif des variétés algébriques sur X, c'est-à-dire le quotient du groupe abélien libre des classes d'isomorphisme de morphismes algébriques $Y\to X$, modulo la relation d'additivité engendrée par

$$[Y\longrightarrow X] = [Z\longrightarrow Y\longrightarrow X] + [Y\setminus Z\longrightarrow Y\longrightarrow X]$$

pour Z un sous ensemble algébrique fermé de Y. Ces groupes relatifs ont été introduits par Looijenga et étudiés par Bittner [2]. De notre point de vue, il s'agit de la version motivique du groupe des fonctions algébriquement constructibles $F(X)$. En particulier, pour toute application algébrique $f : X'\to X$, non nécessairement propre, on définit l'image directe fonctorielle $f_!$ par $f_!([h : Z\to X']) = [f\circ h : Z\to X]$.

Les trois théorèmes suivants caractérisent trois transformations motiviques :

Théorème 2.1. *La transformation $e : K_0(\mathrm{var}/\bullet)\to F(\bullet)$ définie par*

$$e\big([f : Y\longrightarrow X]\big) := f_! 1_Y$$

est l'unique transformation $K_0(\mathrm{var}/\bullet)\to F(\bullet)$ commutant aux images directes pour les applications propres et telle que $e([\mathrm{id}_X]) = 1_X$ pour X lisse et de dimension pure.

L'homomorphisme e permet d'étendre la définition de la transformation de Chern–Schwartz–MacPherson $c_*: F(X) \to H_*(X)$ (voir [8]) à $K_0(\mathrm{var}/X)$. On a :

Théorème 2.2. *Il existe une unique transformation*

$$mC_*: K_0(\mathrm{var}/\bullet) \longrightarrow G_0(\bullet) \otimes \mathbb{Z}[y],$$

commutant aux images directes pour les applications propres et satisfaisant, pour X lisse et de dimension pure, la condition de normalisation

$$mC_*\big([\mathrm{id}_X]\big) = \sum_{i=0}^{\dim X} \big[\wedge^i T^*X\big] \cdot y^i = \lambda_y\big([T^*X]\big) \cap [\mathcal{O}_X].$$

Une construction explicite de mC_*, utilisant la théorie des modules algébriques de Hodge mixtes de M. Saito ou le complexe de Du Bois [5], est donnée dans [3].

On remarquera que mC_0 est l'unique transformation $K_0(\mathrm{var}/\bullet) \to G_0(\bullet)$ commutant aux images directes pour les applications propres et telle que $mC_0([\mathrm{id}_X]) = [\mathcal{O}_X]$ pour X lisse et de dimension pure. L'homomorphisme mC_0 permet d'étendre, à $K_0(\mathrm{var}/X)$, la définition de la transformation de Todd td_* de Baum–Fulton–MacPherson [1].

Notons $\Omega(X)$ le groupe de cobordisme des complexes de faisceaux auto-duaux sur X ([4] et Section 4 de [3]). On a :

Théorème 2.3. *Il existe une unique transformation*

$$sd : K_0(\mathrm{var}/\bullet) \longrightarrow \Omega(\bullet),$$

commutant aux images directes pour les applications propres et telle que

$$sd\big([\mathrm{id}_X]\big) = \big[\mathbb{Q}_X\big[2\dim(X)\big]\big]$$

pour X lisse et de dimension pure.

La preuve du théorème utilise la description de $K_0(\mathrm{var}/X)$ donnée dans [2], (basée sur le « théorème de factorisation faible »). L'homomorphisme sd permet d'étendre la définition de la transformation L_* de L-classe de Cappell–Shaneson [4,9] à $K_0(\mathrm{var}/X)$.

3. La transformation T_y

Théorème 3.1. *Il existe une unique transformation*

$$T_y: K_0(\mathrm{var}/\bullet) \longrightarrow H_*(\bullet) \otimes \mathbb{Q}[y],$$

commutant aux images directes pour les applications propres et satisfaisant la condition de normalisation

$$T_y\big([\mathrm{id}_X]\big) = \widetilde{td_{(y)}}(TX) \cap [X]$$

pour X lisse et de dimension pure.

Les propriétés suivantes montrent que la transformation T_y est un « motif » pour les trois transformations c_*, td_* et L_* :

Propriété 1. *On a un diagramme commutatif* :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[d, "c_*"'] & K_0(\mathrm{var}/X) \arrow[l, "e"'] \arrow[r, "mC_0"] \arrow[d, "T_y"'] & G_0(X) \arrow[d, "td_*"] \\
H_*(X) \otimes \mathbb{Q} & H_*(X) \otimes \mathbb{Q}[y] \arrow[l, "y=-1"'] \arrow[r, "y=0"] & H_*(X) \otimes \mathbb{Q}.
\end{tikzcd}$$

Propriété 2. *Pour X compact on a un diagramme commutatif* :

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathrm{var}/X) \arrow[r, "sd"] \arrow[d, "T_y"] & \Omega(X) \arrow[d, "L_*"] \\ H_*(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}[y] \arrow[r, "y=1"] & H_*(X;\mathbb{Q}), \end{tikzcd}$$

où L_* est la L-classe homologique de Cappell–Shaneson [4] *telle que reformulée par Yokura* [9] (*comme corrigé dans la Section* 4 *de* [3]).

Nous introduisons la classe de Hirzebruch de X par $T_y(X) := T_y([\mathrm{id}_X])$. En particulier, pour toute variété singulière X, on a $T_{-1}(X) = c_*(X)$. Si la variété algébrique complexe X a au plus des singularités de Du Bois au sens de Steenbrink, par exemple si X a seulement des singularités rationnelles, ce qui inclut le cas des variétés toriques, alors $mC_0([\mathrm{id}_X]) = [\mathcal{O}_X] \in G_0(X)$ et donc $T_0(X) = td_*(X) := td_*([\mathcal{O}_X])$. Cependant, en général, $T_0(X)$ n'est pas $td_*(X)$ et $T_1(X)$ n'est pas $L_*(X) := L_*([\mathcal{IC}_X])$. Le Lemme 1.1 montre la

Propriété 3. *La transformation naturelle T_y est donnée par la composition*

$$T_y = td_{(1+y)} \circ mC_* : K_0(\mathrm{var}/X) \longrightarrow H_*(X) \otimes \mathbb{Q}[y] \subset H_*(X) \otimes \mathbb{Q}\big[y, (1+y)^{-1}\big].$$

La classe de Chern motivique mC_* est donc un relèvement naturel de la transformation T_y.

On obtient donc le diagramme suivant, montrant que la classe mC_* s'obtient à partir de c_*, par des relèvements successifs :

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathrm{var}/X) \arrow[rr, equal] \arrow[d, "mC_*"] & & K_0(\mathrm{var}/X) \arrow[rr, "e"] \arrow[d, "T_y"] & & F(X) \arrow[d, "c_*"] \\ G_0(X) \otimes \mathbb{Z}[y] \arrow[r, "td_{(1+y)}"] & H_*(X) \otimes \mathbb{Q}\big[y, (1+y)^{-1}\big] \supset & H_*(X) \otimes \mathbb{Q}[y] \arrow[rr, "y=-1"] & & H_*(X) \otimes \mathbb{Q}. \end{tikzcd}$$

Références

[1] P. Baum, W. Fulton, R. MacPherson, Riemann–Roch for singular varieties, Publ. Math. IHES 45 (1975) 101–145.
[2] F. Bittner, The universal Euler–Poincaré characteristic for varieties of characteristic zero, Comp. Math. 140 (2004) 1011–1032.
[3] J.-P. Brasselet, S. Schürmann, S. Yokura, Hirzebruch classes and motivic Chern classes for singular spaces, Preprint, arXiv: math.AG/0503492.
[4] S. Cappell, J. Shaneson, Stratifiable maps and topological invariants, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991) 521–551.
[5] P. Du Bois, Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière, Bull. Soc. Math. France 109 (1981) 41–81.
[6] W. Fulton, S. Lang, Riemann–Roch Algebra, Springer, New York, 1985.
[7] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer, New York, 1966.
[8] R. MacPherson, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math. 100 (1974) 423–432.
[9] S. Yokura, On Cappell–Shaneson's homology L-class of singular algebraic varieties, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 1005–1012.
[10] S. Yokura, A generalized Grothendieck–Riemann–Roch theorem for Hirzebruch's χ_y-characteristic and T_y-characteristic, Publ. RIMS 30 (1994) 603–610.