Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 243–246
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

# Une propriété de composition dans l'espace $H^s$ (II)

Gérard Bourdaud

*Institut de mathématiques de Jussieu, projet d'analyse fonctionnelle, case 186, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*

Reçu le 21 novembre 2005 ; accepté le 7 décembre 2005

Disponible sur Internet le 5 janvier 2006

Présenté par Yves Meyer

**Résumé**

On établit un théorème de superposition presque optimal dans une large classe d'espaces de Besov, à savoir que toute fonction appartenant localement à $B_p^{s',\infty}(\mathbb{R})$ et s'annulant en 0 opère par composition à gauche sur $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, si les paramètres vérifient les conditions $s' > s > 1$, $s - [s] > 1/p$ et $q \in [1, +\infty]$. ***Pour citer cet article : G. Bourdaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***


**Abstract**

**A composition property in the space $H^s$ (II).** We prove an almost sharp Superposition Theorem for a wide class of Besov spaces. Indeed any function which belongs locally to $B_p^{s',\infty}(\mathbb{R})$, and vanishes at 0, acts by left composition in $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. The conditions on the parameters are the following: $s' > s > 1$, $s - [s] > 1/p$ and $q \in [1, +\infty]$. ***To cite this article: G. Bourdaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***


Dans la Note précédente de même titre [5], nous avons établi une propriété de composition dans les espaces de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ d'ordre $s$ supérieur à $1 + (1/p)$. Nous nous proposons d'exploiter ce résultat pour obtenir un calcul fonctionnel presque optimal dans les espaces de Besov multidimensionnels.

Nous rappellerons d'abord le théorème obtenu en dimension 1, en le corrigeant sur un point mineur. Nous ferons ensuite le point sur les résultats acquis et sur les conjectures concernant le calcul fonctionnel. Enfin nous énoncerons le théorème de composition en dimension supérieure.

Les notations sont celles de la note [5] ; sauf précision contraire on suppose $s > 0$, $p \in ]1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$. Toutes les fonctions sont supposées à valeurs réelles.

## 1. La composition en dimension 1

**Théorème 1.1.** *Si $s$, $p$ et $q$ satisfont les conditions*

$$[s] \geqslant 1, \quad 1/p < s - [s], \quad p \leqslant q\big(s - [s] - (1/p) + 1\big),$$

*Adresse e-mail :* bourdaud@ccr.jussieu.fr (G. Bourdaud).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2005.12.002

*alors, pour tout* $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{\text{loc}}$ *s'annulant en* 0, *et tout* $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$, *on a* $f \circ g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$.

En raisonnant par récurrence sur $[s]$, on ramène aisément le Théorème 1.1 à l'énoncé suivant :

**Proposition 1.2.** *Si* $s$, $p$ *et* $q$ *satisfont les conditions*

$$1 + (1/p) < s < 2 \quad \text{et} \quad p \leqslant q\big(s - (1/p)\big), \tag{1}$$

*il existe* $c = c(s, p, q) > 0$ *tel que*

$$\|f \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leqslant c\|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})}\big(1 + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}\big)^{s-(1/p)}, \tag{2}$$

*pour toute fonction* $f$ *s'annulant en* 0, *et telle que* $f' \in B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})$, *et toute fonction* $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$.

**Remarque 1.** Le théorème est essentiellement celui de la note précédente [5, Théorème 1.1]. Il en diffère sur deux points. Dans la première version, nous faisions sur $q$ une hypothèse un peu plus restrictive, à savoir $q \geqslant p$. En revanche nous donnions une estimation plus précise de $f \circ g$ en affirmant que l'inégalité (2) est vérifiée sous les seules hypothèses du Théorème 1.1, ce qui n'est pas prouvé pour $s > 2$.

Pour établir la Proposition 1.2, on reprend intégralement la preuve donnée dans [5, par. 3]. On aboutit à l'estimation

$$\|f \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leqslant c\|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})}\big(\|g\|^{s-(1/p)}_{B_r^{1+(1/r),1}(\mathbb{R})} + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}\big), \tag{3}$$

où $r := \min(q/p, 1)(sp - 1)$. Or la condition (1) implique le plongement de Sobolev $B_p^{s,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_r^{1+1/r,1}(\mathbb{R})$.

## 2. Le calcul fonctionnel dans les espaces de Besov

Le problème du calcul fonctionnel dans l'espace $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ a pour objet la caractérisation des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que l'opérateur $T_f(g) := f \circ g$ envoie $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même. À ce jour le calcul fonctionnel est entièrement élucidé dans les trois cas suivants :

$$0 < s < 1, \tag{4}$$

$$1 + (1/p) < s < n/p, \quad \text{ou :}\ 1 + (1/p) = s < n/p \text{ et } q > 1, \tag{5}$$

$$p = \infty \quad \text{et} \quad \big(s \neq 1 \quad \text{ou :}\ s = 1 \text{ et } q \in \{1, \infty\}\big). \tag{6}$$

Sous la condition (4), il est bien connu que les fonctions lipschitziennes opèrent et que cette condition est en un sens nécessaire [4]. Sous la condition (5), seules les fonctions linéaires opèrent [1,3,9]. Enfin le cas $p = \infty$ a fait l'objet d'un travail en collaboration avec Massimo Lanza de Cristoforis [6]. L'existence du cas de trivialité (5) conduit à considérer également le problème *restreint*, où l'on recherche les fonctions qui opèrent sur $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. On sait en effet [9, Théorème 5.3.6/2, p. 336] que toute fonction de classe $C^\infty$ opère sur cet espace. Deux conjectures paraissent devoir s'imposer :

**Conjecture 1.** *Soit* $s > 1 + (1/p)$ *et soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction s'annulant en* 0. *Alors* $T_f$ *envoie* $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *dans* $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{\text{loc}}$.

**Conjecture 2.** *Soit* $s = n/p > 1 + (1/p)$ *et soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction s'annulant en* 0. *Alors* $T_f$ *envoie* $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *dans lui-même si et seulement si* $f$ *appartient à* $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ *localement uniformément.*

Les conditions énoncées ci-dessus sont connues pour être *nécessaires* à l'opérance. C'est évidemment le cas pour la première conjecture ; pour la seconde, cela s'établit en adaptant au cas fractionnaire ce qu'on sait faire pour l'espace de Sobolev critique $W^{m,n/m}(\mathbb{R}^n)$, avec $m$ entier, $2 \leqslant m < n$ (voir [2]).

Dans le cas $1 \leqslant s \leqslant 1 + (1/p)$, le calcul fonctionnel reste en partie mystérieux, y compris dans sa version restreinte. La seule étude du cas $p = \infty$ et $s = 1$ donne à penser que des conditions plus compliquées entrent en jeu (voir [6, Théorème 2]).

Le Théorème 1.1 constitue une preuve partielle de la première conjecture. Notons qu'on peut l'établir aussi dans le cas $s-[s]\leqslant 1/p$, ainsi que dans les espaces de Lizorkin–Triebel, au prix de certaines restrictions sur les paramètres $s,\ p,\ q$ [7]. C'est une version affaiblie de cette conjecture que nous établirons en dimension supérieure à 1, dans la section suivante.

## 3. Le calcul fonctionnel en dimension *n*

**Théorème 3.1.** *Si $s,\ s',\ p$ vérifient les conditions $s'>s>1$, $1/p<s-[s]$, alors, pour toute fonction $f$ telle que $f(0)=0$ et $f\in B_p^{s',\infty}(\mathbb{R})_{\mathrm{loc}}$ et tout $g\in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a $f\circ g\in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$.*

Comme celle du Théorème 1.1, la preuve du Théorème 3.1 se ramène à un énoncé plus précis :

**Proposition 3.2.** *Si $s,\ s',\ p$ vérifient la condition $1+(1/p)<s<s'<2$, on a*

$$\|f\circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\|f'\|_{B_p^{s'-1,\infty}(\mathbb{R})}\big(1+\|g\|_\infty\big)^{(s'-1-(1/p))s/s'}\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)},\tag{7}$$

*pour toute fonction $f$ telle que $f'\in B_p^{s'-1,\infty}(\mathbb{R})$ et $f(0)=0$, et toute fonction $g\in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Dans un premier temps, on se place en dimension 1 et on *améliore* l'estimation (2) en faisant en sorte que la non-linéarité du second membre se concentre sur la norme $L^\infty$ de $g$. Cette opération a un coût : on doit supposer que $g$ appartient à un espace de Besov plus petit, à savoir $B_p^{s,\theta}(\mathbb{R})$, pour un certain $\theta<1$.

**Lemme 3.3.** *Si $1+(1/p)<s<2$ et $\theta:=\frac{p}{sp-1}$, il existe une constante $c=c(s,p)>0$ telle que*

$$\|f\circ g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})}\leqslant c\|f'\|_{B_p^{s-1,\infty}(\mathbb{R})}\big(1+\|g\|_\infty\big)^{s-1-(1/p)}\|g\|_{B_p^{s,\theta}(\mathbb{R})},\tag{8}$$

*pour tout $g\in B_p^{s,\theta}(\mathbb{R})$, et pour toute fonction $f$ telle que $f(0)=0$ et $f'\in B_p^{s-1,\infty}(\mathbb{R})$.*

Pour établir le Lemme 3.3, on combine l'estimation (3) avec l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg

$$\|g\|_{B^{\theta s,1}_{sp-1}(\mathbb{R})}\leqslant c\|g\|^{\theta}_{B_p^{s,\theta}(\mathbb{R})}\|g\|_\infty^{1-\theta}\tag{9}$$

(voir [9, Théorème 2.2.5, p. 38]).

**Lemme 3.4.** *Sous les hypothèses du lemme précédent, il existe une constante $c=c(s,p,n)>0$ telle que*

$$\|f\circ g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)}\leqslant c\|f'\|_{B_p^{s-1,\infty}(\mathbb{R})}\big(1+\|g\|_\infty\big)^{s-1-(1/p)}\|g\|_{B_p^{s,\theta}(\mathbb{R}^n)},\tag{10}$$

*pour tout $g\in B_p^{s,\theta}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et toute fonction $f$ telle que $f(0)=0$ et $f'\in B_p^{s-1,\infty}(\mathbb{R})$.*

**Démonstration du Lemme 3.4.** Suivant une caractérisation classique de $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$ pour $0<s<2$, il suffit de prouver que

$$\sup_{0<t\leqslant 1} t^{-s}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\big|S_{te_j}(f\circ g)(x)\big|^p\,\mathrm{d}x\bigg)^{1/p}\tag{11}$$

peut être estimé par le second membre de l'inégalité (10), pour $j=1,\dots,n$. Ici on note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on pose $S_hf(x):=f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$, pour tous $x,h\in\mathbb{R}^n$. Fixons $j$ et, pour $x':=(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$, définissons la fonction $g_{x'}$ par

$$g_{x'}(y):=g(x_1,\dots,x_{j-1},y,x_{j+1},\dots,x_n),\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

En combinant le Lemme 3.3 avec le théorème de Fubini, on voit que l'expression (11) est estimée par

$$\|f'\|_{B_p^{s-1,\infty}(\mathbb{R})}\big(1+\|g\|_\infty\big)^{s-1-(1/p)}\bigg(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\|g_{x'}\|^p_{B_p^{s,\theta}(\mathbb{R})}\,\mathrm{d}x'\bigg)^{1/p}.$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski, il vient alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|g_{x'}\|^p_{B^{s,\theta}_p(\mathbb{R})}\,\mathrm{d}x'\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+s\theta}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|S_{te_j} g(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\theta/p}\right)^{1/\theta} + \|g\|_p \leqslant \|g\|_{B^{s,\theta}_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Sous les hypothèses de la Proposition 3.2, on a

$$\|f\circ g\|_{B^{s',\infty}_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|f'\|_{B^{s'-1,\infty}_p(\mathbb{R})}\left(1+\|g\|_\infty\right)^{s'-1-(1/p)}\|g\|_{B^{s',\theta}_p(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $g \in B^{s',\theta}_p(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (où $\theta := p(s'p-1)^{-1}$) et

$$\|f\circ g_1 - f\circ g_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f'\|_\infty \|g_1 - g_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall g_1, g_2 \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Sachant que $B^{s,q}_p(\mathbb{R}^n) = (L^p(\mathbb{R}^n), B^{s',\theta}_p(\mathbb{R}^n))_{s/s',q}$, au sens de l'interpolation réelle à la Lions–Peetre, le théorème d'interpolation non-linéaire de Peetre [8] (voir aussi [9, Proposition 2.5.4/2, p. 88]) nous donne précisément l'estimation (7). □

## Remerciements

La rédaction de cette note a bénéficié des remarques de Massimo Lanza de Cristoforis, Madani Moussai et Winfried Sickel. Qu'ils en soient ici remerciés.

## Références

[1] G. Bourdaud, Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers, Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1983.
[2] G. Bourdaud, Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev, Invent. Math. 104 (1991) 435–446.
[3] G. Bourdaud, La trivialité du calcul fonctionnel dans l'espace $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 314 (1992) 187–190.
[4] G. Bourdaud, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 10 (1993) 413–422.
[5] G. Bourdaud, Une propriété de composition dans l'espace $H^s$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 221–224.
[6] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis, Functional calculus in Hölder–Zygmund spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002) 4109–4129.
[7] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel, Towards sharp superposition theorems in Besov and Lizorkin–Triebel spaces, en préparation.
[8] J. Peetre, Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces, Mathematica (Cluj) 12 (1970) 1–20.
[9] T. Runst, W. Sickel, Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations, de Gruyter, Berlin, 1996.