Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 175–178
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Opérateurs de Fuchs non linéaires

Patrice Pongérard [a], Claude Wagschal [b]

[a] 23, allée des rubis, La Réunion, France
[b] Université Paul-Sabatier, UMR CNRS 5640, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 17 juin 2005 ; accepté après révision le 15 novembre 2005

Disponible sur Internet le 20 décembre 2005

Présenté par Yvonne Choquet-Bruhat

Résumé

Dans cette Note, nous étudions des équations aux dérivées partielles non linéaires du type de Fuchs au sens de Baouendi–Goulaouic [M.S. Baouendi, C. Goulaouic, Cauchy problems with caracteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973) 455–475 ; M.S. Baouendi, C. Goulaouic, Singular nonlinear Cauchy problems, J. Differential Equations 22 (1976) 268–291] dans des espaces de fonctions suffisamment différentiables par rapport à la variable fuchsienne et dans des espaces de Gevrey par rapport aux autres variables. Les méthodes utilisées reposent sur le formalisme des séries formelles Gevrey adapté aux équations du type de Fuchs. On obtient ainsi des théorèmes qui généralisent ceux de Baouendi–Goulaouic concernant le cas analytique. Rappelons que l'un d'entre nous [P. Pongérard, Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7 (2000) 423–448] a déjà étudié des équations de Fuchs non linéaires à plusieurs variables fuchsiennes dans des espaces de fonctions holomorphes par rapport à ces variables fuchsiennes et de classe de Gevrey par rapport aux autres variables. ***Pour citer cet article : P. Pongérard, C. Wagschal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Nonlinear Fuchsian operators. In this Note, we study nonlinear partial differential equations of Fuchs type in spaces of functions sufficiently differentiable with respect to the Fuchsian variable and in Gevrey spaces with respect the other variables. The results are a generalization of those of Baouendi–Goulaouic obtained in the analytic case. ***To cite this article: P. Pongérard, C. Wagschal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Notations et résultats

Considérons un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide et un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; on notera $x = (x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ et D^α la dérivation en x d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Étant donné un entier $0 \leqslant k \leqslant \infty$ et un espace de Banach E, on note $\mathcal{C}^{k,\infty}(I \times \Omega; E)$ l'espace vectoriel des fonctions $u : I \times \Omega \to E$ admettant pour tout $0 \leqslant l \leqslant k$ [lorsque $k = \infty$, on convient que ceci signifie pour tout l] et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ des dérivées partielles continues $D_t^l D^\alpha u : I \times \Omega \to E$.

Étant donné un nombre réel $d \geqslant 1$, on note $G^{k,d}(I \times \Omega; E)$ le sous-espace constitué des fonctions $u \in \mathcal{C}^{k,\infty}(I \times \Omega; E)$ telles que, pour tout compact $K \subset I$ et tout $0 \leqslant l \leqslant k$, il existe une constante $c_{K,l} \geqslant 0$ telle que

Adresse e-mail : claude.wagschal@free.fr (C. Wagschal).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.11.014

$$\sup_{(t,x)\in K\times\Omega}\left\|D_t^l D^\alpha u(t,x)\right\| \leqslant c_{K,l}^{|\alpha|+1}|\alpha|!^d \quad \text{pour tout } 0\leqslant l\leqslant k \text{ et tout } \alpha\in\mathbb{N}^n.$$

Pour simplifier les notations, étant donné un réel $r>0$ et des entiers $0\leqslant h\leqslant k\leqslant\infty$, nous noterons $G_h^{k,d}(]0,r]\times\Omega;E)$ l'espace vectoriel des $u\in G^{k,d}(]0,r]\times\Omega;E)$ tels que

$$(tD_t)^l u\in G^{0,d}\big([0,r]\times\Omega;E\big) \quad \text{pour tout } 0\leqslant l\leqslant h,$$

ceci signifiant que la fonction $(tD_t)^l u$, bien définie sur $]0,r]\times\Omega$, se prolonge par continuité à $[0,r]\times\Omega$ en une fonction appartenant à l'espace $G^{0,d}([0,r]\times\Omega;E)$.

Remarque 1. L'espace des fonctions appartenant à l'espace $G^{0,d}(I\times\Omega;E)$ et indépendantes de t sera noté $G^d(\Omega;E)$. Lorsque $E=\mathbb{R}$, les espaces précédents seront notés simplement $\mathcal{C}^{k,\infty}(I\times\Omega)$, $G^{k,d}(I\times\Omega)$, etc.

On considère une équation non linéaire de la forme

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(x)(tD_t)^l u(t,x) = f\big(t,x,D^\Lambda u(t,x)\big) \tag{1}$$

où $a_l\in G^d(\Omega)$, $a_m=1$, $s>0$ et

$$\Lambda=\big\{(l,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^n\,;\ l+d\,|\alpha|\leqslant m \text{ et } 0\leqslant l<m\big\}, \qquad D^\Lambda u=\big(t^{l+1}D_t^l D^\alpha u\big)_{(l,\alpha)\in\Lambda},$$

on se donne d'autre part un voisinage ouvert convexe Ω' de l'origine de l'espace $\mathbb{R}^{n'}$ où $n'=\operatorname{Card}\Lambda$ et une fonction $f:[0,s]\times\Omega\times\Omega'\to\mathbb{R}$ appartenant à l'espace $G^{0,d}([0,s]\times(\Omega\times\Omega'))$.

Il s'agit d'une équation du type de Fuchs de poids nul selon la terminologie de [1] ; une équation de poids $0\leqslant p\leqslant m$ se ramène très simplement à une équation de poids nul.

Introduisons le polynôme de degré m, $P(x,\lambda)=\sum_{l=0}^m a_l(x)\lambda^l$ et l'opérateur $P\equiv P(x,tD_t)$, dite partie fuchsienne de l'opérateur (1) qui s'écrit alors

$$P(x,tD_t)u(t,x)=f\big(t,x,D^\Lambda u(t,x)\big).$$

Nous noterons $\mathcal{Z}(x)$, $x\in\Omega$, l'ensemble des zéros du polynôme $P(x,\bullet)$.

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème 1.1. *On suppose qu'il existe une partie compacte K du demi-plan $\Re e\,\lambda<0$ telle que*

$$\mathcal{Z}(x)\subset K \quad \textit{pour tout } x\in\Omega. \tag{2}$$

1. *Alors, il existe $0<r\leqslant s$ tel que l'équation* (1) *admette une unique solution $u\in G_m^{m,d}(]0,r]\times\Omega)$.*
2. *En outre, étant donné un entier $h\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, si $f\in G^{h,d}([0,r]\times\Omega\times\Omega')$, on a*

$$u\in G_{m+h}^{m+h,d}\big(]0,r]\times\Omega\big) \tag{3}$$

et

$$(tD_t)^j u\in G^{h,d}\big([0,r]\times\Omega\big) \quad \textit{pour } 0\leqslant j\leqslant m. \tag{4}$$

Théorème 1.2. 1. *Soient $h,k\in\mathbb{N}$ des entiers tels que $k\leqslant h$. On suppose qu'il existe une partie compacte K du demi-plan $\Re e\,\lambda<k$ telle que*

$$K\cap\mathbb{N}=\emptyset \quad \textit{et} \quad \mathcal{Z}(x)\subset K \quad \textit{pour tout } x\in\Omega. \tag{5}$$

On suppose en outre $f\in G^{h,d}([0,s]\times\Omega\times\mathbb{R}^{n'})$.

Alors, il existe $0<r\leqslant s$ tel que l'équation (1) *admette une unique solution*

$$u\in G_{m+h-k}^{m+h,d}\big(]0,r]\times\Omega\big) \textit{ telle que } (tD_t)^j u\in G^{h,d}\big([0,r]\times\Omega\big) \textit{ pour } 0\leqslant j\leqslant m. \tag{6}$$

2. *S'il existe une partie compacte K de $\mathbb{C}$ telle que* (2) *soit vérifié et si $f\in G^{\infty,d}([0,s]\times\Omega\times\mathbb{R}^{n'})$, l'équation* (1) *admet une unique solution $u\in G^{\infty,d}([0,r]\times\Omega)$.*

2. Séries formelles Gevrey

Le formalisme des séries formelles Gevrey développé dans [3] permet de définir des algèbres de Banach de la façon suivante. Étant donné une série formelle

$$\Phi(t,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^k}{k!}\Phi_k(t) \tag{7}$$

où les fonctions $\Phi_k:[0,r]\to\mathbb{R}_+$ sont continues et une fonction $u\in\mathcal{C}^{0,\infty}([0,r]\times\Omega;E)$, on note $u\ll\Phi$ la relation

$$\forall t\in[0,r],\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\quad \sup_{x\in\Omega}\big\|D^\alpha u(t,x)\big\|\leqslant\Phi_{|\alpha|}(t).$$

On définit l'espace de Banach

$$\mathcal{C}^{0,\infty}_{\Phi}\big([0,r]\times\Omega;E\big)=\big\{u\in\mathcal{C}^{0,\infty}\big([0,r]\times\Omega;E\big);\ (\exists c\geqslant 0)(u\ll c\Phi)\big\}$$

pour la norme $\|u\|_\Phi=\min\{c\geqslant 0;\ u\ll c\Phi\}$. A la série formelle Φ, on associe la série formelle

$$\Phi^d(t,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^k}{k!}k!^{d-1}\Phi_k(t).$$

Soient $R>0$, $\rho>0$ et un entier $m\geqslant 1$, nous utiliserons la série formelle

$$\Phi_{R,\rho}(t,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}R^{(m-1)k}(\rho t)^k\frac{D^{mk}\varphi_R(\xi)}{(mk)!} \tag{8}$$

où φ_R est la série entière (2.1) de [3], $\varphi_R(\xi)=K^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\xi^l}{R^l(l+1)^2}$, la constante $K>0$ étant telle que $\varphi_R^2(\xi)\ll\varphi_R(\xi)$. Cette série formelle $\Phi_{R,\rho}$ est bien de la forme (7) si $\rho r<R$. L'espace de Banach $G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega;E)$ associé à la la série formelle $\Phi^d_{R,\rho}$ est alors une algèbre de Banach dont la norme sera notée $\|\bullet\|_{R,\rho}$.

3. Démonstration des théorèmes

On étudie d'abord la partie fuchsienne de l'opérateur, c'est-à-dire l'équation

$$P(x,tD_t)u(t,x)\equiv\sum_{l=0}^{m}a_l(x)(tD_t)^l u(t,x)=v(t,x). \tag{9}$$

On écrit l'équation (9) sous la forme d'un système du premier ordre en posant

$$u_j=(tD_t)^j u\quad\text{et}\quad U=(u_0,\dots,u_{m-1}),$$

soit

$$(tD_t)U(t,x)=A(x)\cdot U(t,x)+V(t,x)\quad\text{pour }(t,x)\in\,]0,r]\times\Omega \tag{10}$$

où $V=(0,\dots,0,v)$ et $A(x)\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ est un endomorphisme dont le spectre est $\mathcal{Z}(x)$. Sous l'hypothèse (2), si $V\in G^{0,d}([0,r]\times\Omega;\ \mathbb{C}^m)$, l'équation (10) admet d'après [2] une unique solution continue sur $[0,r]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,r]$ donnée par la formule

$$U(t,x)=\int_0^1\sigma^{-A(x)}\cdot V(\sigma t,x)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \tag{11}$$

où $\sigma^{-A(x)}=\mathrm{e}^{-\ln\sigma\,A(x)}\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$, $\sigma>0$. On peut alors établir la

Proposition 3.1. *Il existe $R_0>0$ et une constante $c\geqslant 0$ telle que, pour $0<R\leqslant R_0$, $\rho r<R$ et $V\in G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega;\mathbb{C}^m)$, la solution U de* (10) *appartient à l'espace $G^{1,d}_1(]0,r]\times\Omega;\mathbb{C}^m)$ et*

$$(tD_t)^l U(t,x) \ll c\|V\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k}(\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(k+1)^{1-l}(mk)!} \quad \textit{pour } l = 0, 1.$$

On en déduit que, pour $v \in G^{0,d}([0,r]\times\Omega)$, l'équation (9) admet une unique solution $u \in G_0^{m,d}(]0,r]\times\Omega)$, cette solution appartient à l'espace $G_m^{m,d}(]0,r]\times\Omega)$ et

Proposition 3.2. *Il existe $R_0 > 0$ et une constante $c \geqslant 0$ telle que pour $0 < R \leqslant R_0$, $\rho r < R$ et $v \in G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega)$, la solution $u \in G_m^{m,d}(]0,r]\times\Omega)$ de (9) vérifie*

$$(tD_t)^l u(t,x) \ll c\|v\|_{R,\rho} \sum_{k=0}^{\infty} R^{(m-1)k}(\rho t)^k \frac{(D^{mk}\varphi_R)^d(\xi)}{(k+1)^{m-l}(mk)!} \quad \textit{pour } 0 \leqslant l \leqslant m.$$

En ce qui concerne le Théorème 1.1, on pose $u' = P(x,tD_t)u$, soit $u = P^{-1}u'$, l'Éq. (1) s'écrit $u' = Tu'$ où T désigne l'opérateur

$$T : u' \mapsto f\big(t,x,D^\Lambda\big(P^{-1}u'\big)(t,x)\big).$$

Le Théorème 1.1 résulte alors du théorème du point fixe et de la

Proposition 3.3. *Il existe $R_0 > 0$, $a_0 > 0$ et une fonction $c :]0, R_0] \to \mathbb{R}_+$ tels que, pour*

$$0 < R \leqslant R_0, \quad a \geqslant a_0, \quad c(R)a \leqslant \rho, \quad c(R) < \rho, \quad 0 < r \leqslant s \quad \textit{et} \quad r\rho < R,$$

l'application T est une contraction stricte de la boule fermée $B'(0;a)$ de l'algèbre de Banach $G^d_{R,\rho}([0,r]\times\Omega)$.

Quant au Théorème 1.2, étant acquis pour $k = 0$, on raisonne par récurrence sur k. On le suppose démontré pour $k-1$ et tout $h \geqslant k-1$ et on montre que l'équation (1) admet une unique solution qui peut s'écrire

$$u(t,x) = u_0(x) + tu_1(t,x) \tag{12}$$

où $u_0 \in G^d(\Omega)$ et

$$u_1 \in G^{m+h-1,d}_{m+h-k}\big(]0,r]\times\Omega\big) \quad \text{et} \quad (tD_t)^j u_1 \in G^{h-1,d}\big([0,r]\times\Omega\big), \quad 0 \leqslant j \leqslant m. \tag{13}$$

En fait, u_0 est donné par la formule $P(x,0)u_0(x) = f(0,x,0)$ et u_1 est la solution d'une équation de la forme

$$P_1(x,tD_t)u_1(t,x) = g\big(t,x,D^\Lambda u_1(t,x)\big)$$

où $g \in G^{h-1,d}([0,s]\times\Omega\times\mathbb{R}^{n'})$ et $P_1(x,\lambda) = P(x,\lambda+1)$, formule qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

Références

[1] M.S. Baouendi, C. Goulaouic, Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973) 455–475.
[2] M.S. Baouendi, C. Goulaouic, Singular nonlinear Cauchy problems, J. Differential Equations 22 (1976) 268–291.
[3] C. Wagschal, Le problème de Goursat non linéaire, J. Math. Pures Appl. 58 (1979) 309–337.

Further reading

[4] F. Derrab, A. Nabaji, P. Pongérard, C. Wagschal, Problème de Cauchy Fuchsien dans les espaces de Gevrey, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 11 (2004) 401–424.
[5] P. Pongérard, Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7 (2000) 423–448.
[6] P. Pongérard, Problème de Cauchy caractéristique à solution entière, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 8 (2001) 89–105.