Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 93–97

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Analyse anaplectique sur la droite réelle

André Unterberger

Département de mathématiques, UMR 6056, université de Reims, BP 1039, 51687 Reims cedex 2, France

Reçu le 7 juillet 2005 ; accepté après révision le 7 novembre 2005

Disponible sur Internet le 7 décembre 2005

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

On sait que la représentation métaplectique dans $L^2(\mathbb{R})$ se décompose comme la somme de deux termes figurant l'un dans la série discrète holomorphe du revêtement d'ordre deux du groupe $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, l'autre dans un prolongement de cette série. Partant plutôt de la série complémentaire des représentations unitaires du revêtement universel de G, on parvient, pour tout nombre réel ν mod 2, $\nu \notin \mathbb{Z}$, à la construction d'une « analyse » nouvelle sur la droite réelle. L'espace $\mathfrak{A}_\nu$ qui remplace $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de fonctions se prolongeant en des fonctions entières. La notion d'intégrale sur la droite une fois convenablement modifiée, la transformation de Fourier et la représentation « ν-anaplectique » se définissent sans difficulté, et se combinent de la façon usuelle avec la représentation d'Heisenberg ; les représentations considérées sont pseudo-unitaires par rapport à un même produit scalaire. Les valeurs propres de l'oscillateur harmonique dans l'espace $\mathfrak{A}_\nu$ constituent la suite arithmétique $\nu + \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. ***Pour citer cet article : A. Unterberger, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Anaplectic analysis on the real line. The two irreducible summands of the metaplectic representation in $L^2(\mathbb{R})$ occur for one in the discrete series of the twofold cover of the group $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, for the other in the continuation of this series. Starting instead from the complementary series of the universal cover of G, one can associate with every real number ν mod 2 a new 'analysis' on the real line. The space $\mathfrak{A}_\nu$ that substitutes for $L^2(\mathbb{R})$ consists of functions extending as entire functions of one variable. Once the proper notion of integral on the real line has been introduced, one easily defines a concept of Fourier transformation and a new 'ν-anaplectic' representation: the latter combines in the usual way with the Heisenberg representation, and both representations are pseudo-unitary with respect to some ν-dependent scalar product. The spectrum of the harmonic oscillator in the space $\mathfrak{A}_\nu$ is the set $\nu + \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. ***To cite this article: A. Unterberger, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

A function f on the real line will be said to be *nice* if it extends as an entire function of $z \in \mathbb{C}$ bounded by $C\,\mathrm{e}^{\pi R|z|^2}$ for some choice of C, R, and by $C_1\,\mathrm{e}^{-\pi\varepsilon x^2}$ for some choice of C_1, $\varepsilon > 0$ when z is a positive real number x: note that this condition is not invariant under the symmetry $x \mapsto -x$. Let $\nu \in \mathbb{C}$, $\nu \notin \mathbb{Z}$, and consider the space of $\mathbb{C}^4$-valued

Adresse e-mail : andre.unterberger@univ-reims.fr (A. Unterberger).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.11.009

functions $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, f_{i,0}, f_{i,1})$ with the following properties: the components of $\boldsymbol{f}$ are nice functions, linked by the equations

$$f_{i,0}(x) = \frac{\Gamma(-\nu)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} f_0(ix) + \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} f_0(-ix)\right],$$
$$f_{i,1}(x) = \frac{\Gamma(-\nu)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{i\pi\nu}{2}} f_1(ix) + \mathrm{e}^{\frac{i\pi\nu}{2}} f_1(-ix)\right].$$

The space $\mathfrak{A}_\nu$ is the image of the space of functions so characterized under the map $\boldsymbol{f} \mapsto u$, where the even (resp. odd) part of u is the even part of f_0 (resp. the odd part of f_1). We shall also refer to $\boldsymbol{f}$ as the $\mathbb{C}^4$-realization of u: the Phragmén–Lindelöf theorem implies the uniqueness of $\boldsymbol{f}$, given $u \in \mathfrak{A}_\nu$. For instance, the function $u(x) = (\pi|x|)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{4}}(\pi x^2)$ lies in $\mathfrak{A}_{-\frac{1}{2}}$ since it is the even part of the entire function f_0 such that $f_0(x) = (\frac{2x}{\pi})^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{4}}(\pi x^2)$ for $x > 0$.

One should note that the space $\mathfrak{A}_\nu$ only depends on ν mod 2, though this is not true of the last two components of the $\mathbb{C}^4$-realization of u. The map $u \mapsto u_i$, $u_i(x) = u(ix)$, is an isomorphism from $\mathfrak{A}_\nu$ onto $\mathfrak{A}_{-\nu-1}$. The space $\mathfrak{A}_\nu$ is invariant under the Heisenberg representation, formally defined in the usual way. A solution u, on the real line, of the eigenvalue equation $Lu = \mu u$, with $L = \pi x^2 - \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, lies in $\mathfrak{A}_\nu$ if and only if it is even (resp. odd) and $\mu \in \frac{1}{2} + \nu + 2\mathbb{Z}$ (resp. $\mu \in -\frac{1}{2} + \nu + 2\mathbb{Z}$).

The $\mathcal{Q}$-transform of $u \in \mathfrak{A}_\nu$ is the pair of functions of the real number σ, initially assumed to be large:

$$(\mathcal{Q}u)_0(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\sigma x^2} u\left(x\,\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{4}}\right) \mathrm{d}x,$$
$$(\mathcal{Q}u)_1(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + i\sigma)x\,\mathrm{e}^{-\pi\sigma x^2} u\left(x\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{4}}\right) \mathrm{d}x.$$

If $z = \mathrm{e}^{-i\theta}$ with $\theta > 0$ and small, and $j = 0$ or 1, one may thus set

$$(\mathcal{K}u)_j(z) = |1 - z|^{-\frac{1}{2}} (\mathcal{Q}u)_j\left(i\frac{1+z}{1-z}\right),$$

defining in this way the $\mathcal{K}$-transform of u.

Theorem 0.1. *Let u be an entire function of one variable, satisfying for some pair C, R of positive constants the estimate $|u(z)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{\pi R|z|^2}$. It lies in the space $\mathfrak{A}_\nu$ if and only if the two functions $(\mathcal{K}u)_j(z)$, initially defined when $z = \mathrm{e}^{-i\theta}$ with $\theta > 0$ and small by the equations above, extend as analytic functions to the universal cover of the unit circle, satisfying the quasi-periodicity condition*

$$(\mathcal{K}u)_j\left(\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = \mathrm{e}^{-i\pi(\nu+\frac{1}{2})} (\mathcal{K}u)_j\left(\mathrm{e}^{-i(\theta+2\pi)}\right).$$

One defines the (unusual) concept of integral on $\mathfrak{A}_\nu$, in terms of the $\mathbb{C}^4$-realization of u, by the equation

$$\mathrm{Int}[u] = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}(\nu+\frac{1}{2})}\left[2\cos\frac{\pi\nu}{2}\int_0^\infty f_0(x)\,\mathrm{d}x + \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty f_{i,0}(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

The linear form Int is invariant under real or complex translations, and makes it possible to define the ν-anaplectic Fourier transformation by the (almost usual) equation

$$\left(\mathcal{F}^\nu_{\mathrm{ana}} u\right)(x) = \mathrm{Int}\left[y \mapsto \mathrm{e}^{-2i\pi xy} u(y)\right].$$

Theorem 0.2. *Let N be either ∞ or a positive integer such that $N(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}) \in \mathbb{Z}$. There is a unique representation* Ana_ν *of the N-fold cover $G^{(N)}$ of $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ in the space $\mathfrak{A}_\nu$ satisfying the following properties: for every $u \in \mathfrak{A}_\nu$,* *one has* (*with* $a > 0$ *and* $c \in \mathbb{R}$) $(\mathrm{Ana}_\nu((\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}))u)(x) = a^{-\frac{1}{2}} u(a^{-1}x)$ *and* $(\mathrm{Ana}_\nu((\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}))u)(x) = u(x)\,\mathrm{e}^{i\pi c x^2}$*. Finally,* $\mathrm{Ana}_\nu(\exp \frac{\pi}{2}(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix})) = \mathrm{e}^{-i\pi(\nu+\frac{1}{2})} \mathcal{F}^\nu_{\mathrm{ana}}$*. The* ν*-anaplectic representation combines in the usual way with the Heisenberg representation acting on* $\mathfrak{A}_\nu$*, i.e., the formulas linking the two representations are fully similar to the ones well-known from the metaplectic case.*

Theorem 0.3. *Assume that* $\nu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$*. The* ν*-anaplectic representation and the Heisenberg representation are both pseudo-unitary with respect to the non-degenerate pseudoscalar product on* $\mathfrak{A}_\nu$ *defined in terms of the* $\mathbb{C}^4$*-realization of* u *by the equation*

$$(u \mid u) = 2^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \left[|f_0|^2 + |f_1|^2 + \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-\nu)} \big(|f_{i,0}|^2 - |f_{i,1}|^2 \big) \right] \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Note that, depending whether $\nu \in\ ]-1, 0[\ + 2\mathbb{Z}$ or $]0, 1[\ + 2\mathbb{Z}$, the pseudoscalar product under consideration is a positive-definite scalar product when restricted to the even, or odd, part of $\mathfrak{A}_\nu$: the corresponding part of the ν-anaplectic representation is then unitarily equivalent to a certain representation from Pukanszky's list [2], made explicit in the French part of this Note, which also contains a characterization of the ν-anaplectic representation in terms of the $\mathcal{K}$-transforms.

Detailed proofs, and an analysis of the n-dimensional case on somewhat similar lines, will appear in a volume in preparation [3].

1. Un espace de fonctions entières

Une fonction f sur la droite réelle sera dite *douce* si elle s'étend en une fonction entière de $z \in \mathbb{C}$ bornée par $C\,\mathrm{e}^{\pi R|z|^2}$ pour une certaine paire C, R de constantes positives, et par $C_1\,\mathrm{e}^{-\pi\varepsilon x^2}$ pour un choix convenable de C_1, $\varepsilon > 0$ lorsque z est un nombre réel positif x : noter que cette condition n'est pas invariante par la symétrie $x \mapsto -x$. Soit $\nu \in \mathbb{C}$, $\nu \notin \mathbb{Z}$, et considérons l'espace des fonctions $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, f_{i,0}, f_{i,1})$ possédant les propriétés suivantes : les quatre composantes de $\boldsymbol{f}$ sont des fonctions douces, liées par les équations

$$f_{i,0}(x) = \frac{\Gamma(-\nu)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \big[\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} f_0(ix) + \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} f_0(-ix) \big],$$
$$f_{i,1}(x) = \frac{\Gamma(-\nu)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \big[\mathrm{e}^{-\frac{i\pi\nu}{2}} f_1(ix) + \mathrm{e}^{\frac{i\pi\nu}{2}} f_1(-ix) \big].$$

L'espace $\mathfrak{A}_\nu$ est l'image de l'espace des fonctions que l'on vient de définir par l'application $\boldsymbol{f} \mapsto u$, où la partie paire (resp. impaire) de u est la partie paire de f_0 (resp. la partie impaire de f_1). On désignera la fonction $\boldsymbol{f}$ sous le nom de $\mathbb{C}^4$-réalisation de u : le théorème de Phragmén–Lindelöf en montre l'unicité, pour une fonction $u \in \mathfrak{A}_\nu$ donnée. Par exemple, lorsque $\nu = -\frac{1}{2}$, on peut considérer la fonction $u(x) = (\pi|x|)^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{4}}(\pi x^2)$, qui est la partie paire de la fonction entière f_0 telle que $f_0(x) = (\frac{2x}{\pi})^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{4}}(\pi x^2)$ pour $x > 0$.

L'espace $\mathfrak{A}_\nu$ ne dépend que de ν mod 2, bien qu'il n'en soit pas de même des deux dernières composantes de la $\mathbb{C}^4$-réalisation de u. L'application $u \mapsto u_i$, $u_i(x) = u(ix)$, est un isomorphisme de $\mathfrak{A}_\nu$ sur $\mathfrak{A}_{-\nu-1}$ (en particulier, un automorphisme de $\mathfrak{A}_{\pm\frac{1}{2}}$). L'espace $\mathfrak{A}_\nu$ est invariant par la représentation d' Heisenberg, formellement définie par les formules habituelles. Une solution u, sur la droite réelle, de l'équation $Lu = \mu u$, avec $L = \pi x^2 - \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, appartient à $\mathfrak{A}_\nu$ si et seulement si u est paire (resp. impaire) et $\mu \in \frac{1}{2} + \nu + 2\mathbb{Z}$ (resp. $\mu \in -\frac{1}{2} + \nu + 2\mathbb{Z}$).

La $\mathcal{Q}$-transformée de $u \in \mathfrak{A}_\nu$ est la paire de fonctions du nombre réel σ, initialement supposé grand, définie comme suit :

$$(\mathcal{Q}u)_0(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\sigma x^2}\, u\big(x\,\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{4}}\big)\, \mathrm{d}x,$$

$$(\mathcal{Q}u)_1(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + i\sigma)x\, \mathrm{e}^{-\pi\sigma x^2}\, u\big(x\, \mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{4}}\big)\, \mathrm{d}x.$$

Si $z = \mathrm{e}^{-i\theta}$ avec $\theta > 0$ et petit, et si $j = 0$ or 1, on peut donc poser

$$(\mathcal{K}u)_j(z) = |1 - z|^{-\frac{1}{2}} (\mathcal{Q}u)_j \left(i \frac{1 + z}{1 - z}\right),$$

definissant ainsi la $\mathcal{K}$-transformée de u.

2. La représentation anaplectique

Théorème 2.1. *Soit u une fonction entière d'une variable, satisfaisant pour une certaine paire C, R de constantes positives l'inégalité $|u(z)| \leqslant C\, \mathrm{e}^{\pi R|z|^2}$. Elle appartient à l'espace $\mathfrak{A}_\nu$ si et seulement si les deux fonctions $(\mathcal{K}u)_j(z)$, initialement définies lorsque $z = \mathrm{e}^{-i\theta}$ avec $\theta > 0$ petit par les formules ci-dessus, s'étendent en des fonctions analytiques sur le revêtement universel du cercle-unité, satisfaisant la condition*

$$(\mathcal{K}u)_j\big(\mathrm{e}^{-i\theta}\big) = \mathrm{e}^{-i\pi(\nu+\frac{1}{2})} (\mathcal{K}u)_j\big(\mathrm{e}^{-i(\theta+2\pi)}\big).$$

On définit le concept d'intégrale sur l'espace $\mathfrak{A}_\nu$, en termes de la $\mathbb{C}^4$-réalisation de u, par l'équation

$$\mathrm{Int}[u] = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}(\nu+\frac{1}{2})} \left[2\cos\frac{\pi\nu}{2} \int_0^{\infty} f_0(x)\, \mathrm{d}x + \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} f_{i,0}(x)\, \mathrm{d}x \right].$$

La forme linéaire Int est invariante par les translations réelles ou complexes, et permet de définir la transformation de Fourier ν-anaplectique par l'équation (presque usuelle)

$$\big(\mathcal{F}^\nu_{\mathrm{ana}} u\big)(x) = \mathrm{Int}\big[y \mapsto \mathrm{e}^{-2i\pi xy}\, u(y)\big].$$

On montre, pour toute fonction $u \in \mathfrak{A}_\nu$, les formules

$$\big(\mathcal{K}\big(\mathcal{F}^\nu_{\mathrm{ana}} u\big)\big)_0(z) = \mathrm{e}^{i\pi(\nu+\frac{1}{2})} (\mathcal{K}u)_0\big(\mathrm{e}^{i\pi} z\big),$$
$$\big(\mathcal{K}\big(\mathcal{F}^\nu_{\mathrm{ana}} u\big)\big)_1(z) = \mathrm{e}^{i\pi\nu} (\mathcal{K}u)_1\big(\mathrm{e}^{i\pi} z\big).$$

Théorème 2.2. *Supposons $N = \infty$, ou bien que N est un entier positif tel que $N(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}) \in \mathbb{Z}$. Il existe une représentation Ana_ν unique du revêtement $G^{(N)}$ d'ordre N de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ dans l'espace $\mathfrak{A}_\nu$ satisfaisant les propriétés suivantes : pour toute fonction $u \in \mathfrak{A}_\nu$, on a (avec $a > 0$ et $c \in \mathbb{R}$) $(\mathrm{Ana}_\nu\big(\big(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\big)\big)u)(x) = a^{-\frac{1}{2}} u(a^{-1}x)$ et $(\mathrm{Ana}_\nu\big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\big)\big)u)(x) = u(x)\mathrm{e}^{i\pi cx^2}$. Finalement, $\mathrm{Ana}_\nu\big(\exp\frac{\pi}{2}\big(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\big)\big) = \mathrm{e}^{-i\pi(\nu+\frac{1}{2})} \mathcal{F}^\nu_{\mathrm{ana}}$. Les opérateurs de la représentation ν-anaplectique normalisent le groupe des opérateurs de la représentation d'Heisenberg agissant sur $\mathfrak{A}_\nu$, les formules liant les deux représentations étant les mêmes que dans le cas de la représentation métaplectique.*

La représentation ν-anaplectique se définit globalement, de façon commode, au moyen des $\mathcal{K}$-transformées des fonctions de l'espace $\mathfrak{A}_\nu$. Si $g \in G^{(N)}$ est au-dessus de la matrice $\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big) \in G$, posons $\big(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{smallmatrix}\big) = S\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big)S^{-1}$ avec $S = 2^{-\frac{1}{2}}\big(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\big)$. Il existe un unique homomorphisme $g \mapsto [g]$ du groupe $G^{(N)}$ dans le groupe des automorphismes analytiques du revêtement $\Sigma^{(N)}$ d'ordre N du cercle-unité, possédant la propriété suivante : pour toute fonction $u \in \mathfrak{A}_\nu$, et tout $z \in \Sigma^{(N)}$, on a

$$\big(\mathcal{K}\,\mathrm{Ana}_\nu(g)u\big)_0(z) = \left(\frac{[g^{-1}]_*\, \mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}(z)\right)^{\frac{1}{4}} (\mathcal{K}u)_0\big([g^{-1}](z)\big),$$

$$\big(\mathcal{K}\,\mathrm{Ana}_\nu(g)u\big)_1(z) = \left(\frac{[g^{-1}]_*\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}(z)\right)^{\frac{1}{4}} \big[\alpha - i\beta\big(\big[g^{-1}\big](z)\big)^{-1}\big] \cdot (\mathcal{K}u)_1\big(\big[g^{-1}\big](z)\big);$$

au second membre des deux équations figurent les dérivées de Radon–Nikodym de la transformation $[g^{-1}]$ relativement à la mesure invariante par rotation de $\Sigma^{(N)}$.

Théorème 2.3. *Supposons $\nu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. La représentation ν-anaplectique et la représentation d'Heisenberg sont toutes deux pseudo-unitaires par rapport au produit « pseudoscalaire » non-dégénéré sur $\mathfrak{A}_\nu$ défini en termes de la $\mathbb{C}^4$-réalisation de u par l'équation*

$$(u \mid u) = 2^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \left[|f_0|^2 + |f_1|^2 + \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-\nu)} \left(|f_{i,0}|^2 - |f_{i,1}|^2 \right) \right] \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, considérons, comme dans [1, Chapitre 8], la solution $u(x) = D_\mu(2\pi^{\frac{1}{2}}x)$ de l'équation $Lu = (\mu + \frac{1}{2})u$ caractérisée par la condition $D_\mu(2\pi^{\frac{1}{2}}x) \sim (2\pi^{\frac{1}{2}}x)^\mu \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ lorsque $x \to +\infty$. Notant (abusivement) D_μ la fonction $x \mapsto D_\mu(2\pi^{\frac{1}{2}}x)$, on introduit, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la fonction paire $\phi^{\nu+2j}$ dont la $\mathbb{C}^4$-réalisation dans l'espace $\mathfrak{A}_\nu$ est le vecteur $(D_{\nu+2j}, 0, (-1)^j \frac{\Gamma(\nu+2j+1)}{\Gamma(\nu+1)} D_{-\nu-2j-1}, 0)$, et la fonction impaire $\psi^{\nu+2j+1}$ associée au vecteur $(0, D_{\nu+2j+1}, 0, (-1)^j \frac{\Gamma(\nu+2j+2)}{\Gamma(\nu+1)} D_{-\nu-2j-2})$. Toutes ces fonctions peuvent s'obtenir à partir de la fonction ϕ^ν par l'action itérée des opérateurs donnés par les mêmes formules que les opérateurs de création et d'annihilation habituels, mais dont le deuxième ne mérite plus ce nom dans la théorie anaplectique. On vérifie les formules

$$\left(\phi^{\nu+2j} | \phi^{\nu+2j}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(\nu+2j+1), \qquad \left(\psi^{\nu+2j+1} | \psi^{\nu+2j+1}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(\nu+2j+2).$$

Celles-ci permettent d'identifier, pour toute valeur de $\nu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, une « moitié »de la représentation ν-anaplectique à une représentation extraite de la série notée (C_q^τ) par Pukanszky [2], à savoir celle pour laquelle $q = \frac{3}{16}$ et $\tau \in [0,1[$ est caractérisé, lorsque $\nu \in]-1,0[+2\mathbb{Z}$, par la condition $\tau \equiv -\frac{1}{2}(\nu + \frac{1}{2}) \bmod 1$, et lorsque $\nu \in]0,1[+2\mathbb{Z}$ par la condition $\tau \equiv -\frac{1}{2}(\nu - \frac{1}{2}) \bmod 1$. On a dans tous les cas $\tau(1-\tau) < q$, et la partie paire (resp. impaire) de la représentation ν-anaplectique est unitairement équivalente à la représentation C_q^τ. Compte tenu de [2, p. 97], la représentation C_q^τ utile ne figure jamais dans la formule de Plancherel du revêtement universel de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Les preuves, et une extension à l'analyse à plusieurs dimensions, paraîtront dans un volume en préparation [3].

Références

[1] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, third ed., Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[2] L. Pukanszky, The Plancherel formula for the universal covering group of $\mathrm{SL}(\mathbb{R},2)$, Math. Ann. 156 (1964) 96–143.

[3] A. Unterberger, The fourfold way in real analysis, and an alternative to the metaplectic representation, à paraître chez Birkhäuser.