Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 7–10
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

L'inégalité de Bohr pour les séries de Dirichlet

Ramachandran Balasubramanian [a], Bruno Calado [b], Hervé Queffélec [c]

[a] *The Institute of Mathematical Sciences, Chennai 600 113, Inde*
[b] *Université Paris-Sud XI, centre d'Orsay, laboratoire de mathématiques, bâtiment 425, 91405 Orsay, France*
[c] *UFR de mathématiques, université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France*

Reçu le 19 septembre 2005 ; accepté le 11 octobre 2005

Disponible sur Internet le 17 novembre 2005

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous étendons au cas des séries de Dirichlet des résultats de H. Bohr pour les séries de Taylor en une variable, eux-mêmes généralisés par Paulsen, Popescu et Singh, ou étendus au cas de plusieurs variables par Aizenberg, Boas et Khavinson. Nous montrons notamment que, si $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, avec $\|f\|_\infty := \sup_{\Re s>0} |f(s)| < \infty$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-2} \leqslant \|f\|_\infty$ et même légèrement mieux, et $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-1/2} \leqslant C\|f\|_\infty$, C étant une constante absolue. ***Pour citer cet article : R. Balasubramanian et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

The Bohr inequality for Dirichlet series. We extend to the setting of Dirichlet series previous results of Bohr for Taylor series in one variable, themselves generalized by Paulsen, Popescu and Singh or extended to several variables by Aizenberg, Boas and Khavinson. We show in particular that, if $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, with $\|f\|_\infty := \sup_{\Re s>0} |f(s)| < \infty$, then $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-2} \leqslant \|f\|_\infty$ and even slightly better, and $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-1/2} \leqslant C\|f\|_\infty$, C being an absolute constant. ***To cite this article: R. Balasubramanian et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Introduction

Soit H^∞ l'espace des fonctions analytiques bornées dans le disque unité $\mathbb{D}$. Une inégalité bien connue de Bohr [8] affirme que pour $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^\infty$ on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant \|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} \left|f(z)\right|. \tag{1}$$

Adresses e-mail : balu@imsc.res.in (R. Balasubramanian), bcalado999@aol.com (B. Calado), Herve.Queffelec@math.univ-lille1.fr (H. Queffélec).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.
doi:10.1016/j.crma.2005.10.014

Pour $r < 1$ on a trivialement :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant C_r \|f\|_\infty, \tag{2}$$

avec par exemple $C_r := (1-r^2)^{-1/2}$. Récemment, Bombieri et Bourgain [9] ont montré que le meilleur C_r possible dans l'inégalité (2) est équivalent à $(1-r^2)^{-1/2}$ quand $r \overset{<}{\to} 1$.

L'inégalité (1) (dans laquelle $1/3$ est optimal) est une manifestation supplémentaire de l'hypercontractivité du semi-groupe de Poisson $(P_r)_{0\leqslant r<1}$ pour r petit, puisqu'elle exprime que $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto P_r f := (a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est une contraction de H^∞ dans l'espace ℓ^1 des suites sommables pour $r \leqslant 1/3$, alors que (2) exprime que la même application est toujours continue de H^∞ dans ℓ^1 pour $r < 1$ (et certainement pas pour $r = 1$). Pour d'autres propriétés d'hypercontractivité du semi-groupe $(P_r)_{0\leqslant r<1}$, voir par exemple Weissler [18].

Cette inégalité a connu un regain d'intérêt quand Dixon [12] a montré son lien avec l'inégalité de Von Neumann pour les algèbres de Banach ; par la suite, Boas et Khavinson [6] et Aizenberg [1] ont étudié son analogue multidimensionnel pour la boule, le polydisque ou d'autres domaines. Bénéteau, Dahlner, Khavinson et Korenblum [4,5] ont étudié le cas des espaces de Hardy H^p en une variable. Voir aussi [11].

Le but de ce travail est d'étudier l'analogue des inégalités (1) et (2) quand les séries de Taylor sont remplacées par des séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, et les espaces de Hardy H^p par les espaces de Hardy correspondants $\mathcal{H}^p$ de séries de Dirichlet (cf. [2,3] pour les définitions précises) ou certains de leurs sous-espaces : par exemple, $\mathcal{H}^\infty$ est l'espace des séries de Dirichlet $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ telles que $\|f\|_\infty := \sup_{\Re s>0} |f(s)| < \infty$. Le semi-groupe $(P_r)_{0\leqslant r<1}$ est alors évidemment remplacé par le semi-groupe de Dirichlet $(D_\epsilon)_{\epsilon>0}$, où $D_\epsilon f = (a_n n^{-\epsilon})_{n\geqslant 1}$: ce semi-groupe a également de bonnes propriétés d'hypercontractivité (cf. [2,3]). Nous sommes donc amenés, pour un espace $\mathcal{E}$ de séries de Dirichlet, à définir deux abscisses (analogues des rayons de Bohr $1/3$ et 1 dans (1) et (2)) :

l'abscisse de Bohr isométrique $\rho_1(\mathcal{E})$, définie comme le plus petit des $\sigma \geqslant 0$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} \leqslant \|f\|, \tag{3}$$

l'abscisse de Bohr isomorphe $\rho(\mathcal{E})$, définie comme la borne inférieure des $\sigma \geqslant 0$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} \leqslant C_\sigma \|f\|. \tag{4}$$

Les séries de Dirichlet convergeant moins brutalement que les séries entières, il se peut que (4) ait lieu pour $\sigma = \rho(\mathcal{E})$: on dira alors que l'abscisse $\rho(\mathcal{E})$ est *atteinte*.

Comme l'a observé Helson [13], il résulte des travaux de Bayart [2,3] que l'on a $\rho(\mathcal{H}^1) = 1/2$, la valeur $1/2$ n'étant pas atteinte. Et un résultat ancien et non trivial de Bohnenblust et Hille [7] dit qu'on a aussi $\rho(\mathcal{H}^\infty) = 1/2$, bien que $\mathcal{H}^\infty$ soit un espace beaucoup plus petit que $\mathcal{H}^1$. Un des principaux résultats de ce travail est que la valeur $1/2$ est atteinte pour $\mathcal{H}^\infty$, ce qui est une façon de différencier $\mathcal{H}^\infty$ et $\mathcal{H}^1$.

Les résultats de Boas et Khavinson [6] montrent que le rayon de Bohr (l'analogue de $1/3$) pour le polydisque tend vers zéro quand le nombre de variables tend vers l'infini, alors que le *point de vue de Bohr* [8,16] montre que $\mathcal{H}^\infty$ s'assimile en un sens (cf. aussi Cole et Gamelin [10]) à un espace de séries de Taylor sur le polydisque à une infinité de variables. On pourrait donc croire que rien d'analogue à (1) n'aura lieu pour les séries de Dirichlet. Or, le second résultat principal de ce travail est que $\rho_1(\mathcal{H}^\infty) < \infty$, et qu'on a plus précisément l'encadrement $1.5850\ldots = \log 3/\log 2 \leqslant \rho_1(\mathcal{H}^\infty) \leqslant \sigma_0 = 1.8154\ldots$; en particulier, pour toute $f \in \mathcal{H}^\infty$, $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, on a : $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-2} \leqslant \|f\|_\infty$.

Cette Note d'annonce ne comporte aucune démonstration détaillée. Celles-ci seront rédigées ultérieurement.

1. L'abscisse de Bohr isomorphe

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 1.1. *Les espaces $\mathcal{H}^p$ de séries de Dirichlet vérifient les propriétés suivantes* :

(1) *Si* $1 \leqslant p < \infty$, $\rho(\mathcal{H}^p) = 1/2$, *mais cette valeur n'est pas atteinte.*
(2) $\rho(\mathcal{H}^\infty) = 1/2$, *et cette valeur est atteinte.*

Le (1) résulte, comme on l'a déjà dit, des travaux de Bayart [2,3]. Le (2) est un cas particulier d'un résultat un peu plus général sur les multiplicateurs de $\mathcal{H}^\infty$ dans ℓ^1 :

Théorème 1.2. *Soit* $\lambda(x) := \sqrt{\log x \log\log x}$ *pour* $x \geqslant 3$, $\lambda(x) := 0$ *si* $x < 3$. *Il existe une constante numérique* $b > 0$ *avec la propriété suivante* :

si $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite décroissante de réels positifs telle que pour un* $c < b$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu_n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-c\lambda(n)} < \infty$, *alors* $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ *est un multiplicateur de* $\mathcal{H}^\infty$ *dans* ℓ^1, *c'est-à-dire pour toute* $f \in \mathcal{H}^\infty$, $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$, *on a* : $\sum_{n=1}^\infty \mu_n |a_n| < \infty$.

On peut par exemple prendre $\mu_n := \mathrm{e}^{\delta\lambda(n)}/\sqrt{n}$, pour $0 \leqslant \delta < b$. La preuve de ce théorème 1.2 utilise entre autres un travail antérieur du troisième auteur avec Konyagin [14].

Un sous-espace intéressant de $\mathcal{H}^\infty$ est l'espace $\mathcal{H}_k^\infty$ des fonctions $\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$ telles que $a_n = 0$ si $\Omega(n) > k$, où $\Omega(n)$ désigne comme d'habitude le nombre de facteurs premiers de n comptés avec leur multiplicité. Bohnenblust et Hille [7] ont montré que pour $k \geqslant 1$, $\rho(\mathcal{H}_k^\infty) = 1/2 - 1/(2k)$, et nous montrons ici que

Théorème 1.3. *Pour l'espace* $\mathcal{H}_k^\infty$, *la valeur* $\rho(\mathcal{H}_k^\infty) = 1/2 - 1/(2k)$ *est atteinte.*

La preuve utilise le point de vue de Bohr pour les séries de Dirichlet [8,16] et les inégalités de Khintchine pour les produits de longueur fixée de variables de Steinhaus [16,17].

2. L'abscisse de Bohr isométrique

Une des preuves les plus simples de l'inégalité de Bohr (1) est due à Wiener (voir [8]), qui a observé que, si $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \in H^\infty$ avec $\|f\|_\infty = 1$, alors $\forall n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant 1 - |a_0|^2$. Il en a ensuite déduit l'inégalité (1). Paulsen, Popescu et Singh [15] ont donné une preuve « par opérateurs » de cette inégalité, qui s'adapte bien au cas des séries de Dirichlet, et se généralise (cf. aussi Boas et Khavinson [6]) comme suit :

Proposition 2.1. *Soit* $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s} \in \mathcal{H}^\infty$ *avec* $\|f\|_\infty = 1$ *et* $k \geqslant 1$. *Alors on a* :

(0) $\forall n \geqslant 2$, $|a_n| \leqslant 1 - |a_1|^2$.
(1) $(\sum_{\Omega(n)=k} |a_n|^2)^{1/2} \leqslant 1 - |a_1|^2$.
(2) $\sum_{p \text{ premier}} |a_p| \leqslant 1 - |a_1|^2$.

L'inégalité (2) constitue une amélioration d'une autre inégalité classique de Bohr [16] : $\sum_{p \text{ premier}} |a_p| \leqslant \|f\|_\infty$. Cette Proposition 2.1 permet de montrer le

Théorème 2.2. *L'abscisse de Bohr isométrique* $\rho_1(\mathcal{H}^\infty)$ *vérifie l'encadrement suivant* : $1.5850\ldots = \log 3/\log 2 \leqslant \rho_1(\mathcal{H}^\infty) \leqslant \sigma_0 = 1.8154\ldots$, *où* σ_0 *est l'unique racine de l'équation*

$$2^{-\sigma} + \frac{3\sqrt{3}\sqrt{F(4\sigma)}}{2\sqrt{\pi}} + \sum_{n>1,\ \Omega(n)\geqslant 3} n^{-\sigma} = \frac{1}{2},$$

ζ *désignant la fonction zêta de Riemann et* F *la fonction définie par* $F(s) := \sum_{p \text{ premier}} p^{-s}$.

On a en particulier, pour toute $f \in \mathcal{H}^\infty$, $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$, *on a* : $\sum_{n=1}^\infty |a_n| n^{-2} \leqslant \|f\|_\infty$.

Remerciements

Une partie de ce travail a été faite durant un séjour du troisième auteur à l'Institut de Mathématiques de Chennai, en Mars 2005.

Références

[1] L. Aizenberg, Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (4) (2000) 1147–1155.
[2] F. Bayart, Opérateurs de composition sur des espaces de séries de Dirichlet et problèmes d'hypercyclicité simultanés, Thèse à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.
[3] F. Bayart, Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators, Monat. Math. 136 (2002) 203–236.
[4] C. Bénéteau, B. Korenblum, Some coefficient estimates for H^p functions, in: Karmiel Conference Proceedings, 2001.
[5] C. Bénéteau, A. Dahlner, D. Khavinson, Remarks on the Bohr phenomenon, Preprint.
[6] R.P. Boas, D. Khavinson, Bohr's power series theorem in several variables, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (10) (1997) 2975–2979.
[7] H.F. Bohnenblust, E. Hille, On the absolute convergence of Dirichlet series, Ann. Math. 2 (1931) 600–622.
[8] H. Bohr, A theorem concerning power series, Proc. London Math. Soc. 13 (2) (1914) 1–5.
[9] E. Bombieri, J. Bourgain, A remark on Bohr's inequality, Int. Math. Res. Not. 80 (2004) 4307–4330.
[10] B.J. Cole, T.W. Gamelin, Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra, Proc. London Math. Soc. 53 (1986) 112–142.
[11] A. Defant, D. Garcia, M. Maestre, Bohr's power series theorem and local Banach space theory, J. Reine Angew. Math. 557 (2003) 173–197.
[12] P.G. Dixon, Banach algebras satisfying the non-unital Von Neumann inequality, Bull. London Math. Soc. 27 (1995) 359–362.
[13] H. Helson, Dirichlet Series, Regent Press, 2005.
[14] S.V. Konyagin, H. Queffélec, The translation $1/2$ in the theory of Dirichlet series, Real Anal. Exchange 27 (2002) 155–176.
[15] V.I. Paulsen, G. Popescu, D. Singh, On Bohr's inequality, Proc. London Math. Soc. 3 (85) (2002) 493–512.
[16] H. Queffélec, Harald Bohr's vision of Dirichlet series; old and new results, J. Anal. 3 (1995) 43–60.
[17] J. Sawa, The best constant in the Khintchine inequality for complex Steinhaus variables, the case $p = 1$, Studia Math. 81 (1985) 107–126.
[18] F.B. Weissler, Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle, J. Funct. Anal. 37 (1980) 218–234.