Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 465–468
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Combinatoire

Tournois sans intervalle acyclique

Jean-François Culus, Bertrand Jouve

GRIMM, maison de la recherche, université Toulouse 2, 5, allées Antonio-Machado, 31058 Toulouse cedex 9, France

Reçu le 13 juillet 2005 ; accepté après révision le 9 septembre 2005

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Un *intervalle* X d'un tournoi T est un ensemble de sommets de T tel que tout sommet extérieur à X domine ou est dominé par tous les sommets de X. Nous caractérisons les tournois dont tous les intervalles acycliques non vides sont des singletons et qui sont critiques pour cette propriété, c'est-à-dire que la suppression d'un sommet quelconque du tournoi donne naissance à au moins un intervalle acyclique de plus de 2 sommets. Ces tournois sont exactement ceux construits comme la composition d'un tournoi quelconque avec des tournois circulants. Ce travail sur les intervalles acycliques a été motivé par la recherche de structures ordonnées dans des tournois pour lesquels aucun ordre médian ne s'impose naturellement. ***Pour citer cet article : J.-F. Culus, B. Jouve, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Tournaments without acyclic interval. An interval X of a tournament T is a vertex subset of T such that any vertex not in X either dominates or is dominated by all of the vertices in X. We caracterize the tournaments such that the only non empty acyclic intervals are the singletons and which are critical for that property, that is whenever a vertex is removed at least one acyclic interval with more than 2 vertices is created. These tournaments are exactly those which are the composition of any tournament with circulant tournaments. That work on acyclic intervals was motivated by the study of tournaments for which no median order forced itself naturally. ***To cite this article: J.-F. Culus, B. Jouve, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Dans un graphe orienté, on dira qu'un sommet i précède (ou domine) un sommet j s'il existe un arc orienté de i vers j. Le sommet j est alors un successeur de i. L'ensemble des successeurs de i est noté $N^+(i)$. Un n-tournoi T est un graphe orienté à n sommets tel que pour tout couple de sommets distincts $\{i, j\}$, soit i domine j soit j domine i. Un *intervalle* X de T est un ensemble de sommets de T tel que tout sommet extérieur à X domine ou est dominé par tous les sommets de X. De nombreux noms existent pour qualifier les intervalles [4] : ensembles convexes, composantes, module, etc. Schmerl et Trotter [7] puis Ille [2] se sont intéressés aux tournois *indécomposables*, c'est-à-dire dont les intervalles sont soit vides, soit des singletons, soit contiennent tous les sommets du tournoi. Dans [2] sont notamment

Adresses e-mail : culus@univ-tlse2.fr (J.-F. Culus), jouve@univ-tlse2.fr (B. Jouve).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.09.017

caractérisés les tournois *critiquement indécomposables*, c'est-à-dire qui ne sont plus indécomposables lorsqu'on leur supprime un sommet quelconque.

Parallèlement à ce travail, Neumann-Lara a étudié les tournois dits *critiquement r-dichromatiques* [6]. Un tournoi est r-dichromatique si une partition de ses sommets en sous-ensembles acycliques (c'est-à-dire sans circuit, qui induisent donc des ordres totaux) contient au minimum un nombre r de sous-ensembles. Il est critiquement r-dichromatique si ce nombre diminue strictement lorsqu'on supprime un sommet quelconque du tournoi. Une famille infinie de tels tournois est construite dans [6].

Nous étudions ici les partitions de sommets qui satisfont aux deux contraintes, c'est-à-dire dont les sous-ensembles sont des intervalles acycliques. Nous caractérisons les tournois dont tous les intervalles acycliques non vides sont des singletons et qui sont critiques pour cette propriété, c'est-à-dire que la suppression d'un sommet quelconque du tournoi donne naissance à au moins un intervalle acyclique de plus de 2 sommets. Ce travail sur les intervalles acycliques a été motivé par la recherche de structures ordonnées dans des tournois pour lesquels aucun ordre médian ne s'impose naturellement [3].

2. Quelques résultats sur l'indécomposabilité

Pour alléger l'écriture, un tournoi dont les intervalles acycliques sont soit vides soit des singletons est dit *a-indécomposable*. Un tournoi qui n'est pas a-indécomposable (resp. indécomposable) est dit a-décomposable (resp. décomposable).

Pour $n \geqslant 4$, l'ensemble des n-tournois indécomposables est un sous-ensemble propre des tournois a-indécomposables. Pour illustrer la différence entre indécomposabilité et a-indécomposabiblité, prenons l'exemple de $n = 4$ et $n = 5$. Il est facile de vérifier qu'aucun 4-tournoi n'est indécomposable mais que deux sont a-indécomposables. Pour 5 sommets, un seul 5-tournoi est a-indécomposable et décomposable (voir Fig. 1). Notons qu'il existe un intervalle acyclique contenant au moins deux éléments si et seulement s'il existe deux sommets i et i^+ tels que

$$N^+(i^+) = N^+(i) \setminus \{i^+\}. \tag{1}$$

Ceci permet d'affirmer par exemple que les tournois réguliers sont a-indécomposables. En ajoutant une source à un tournoi régulier d'ordre n on obtient un tournoi a-indécomposable d'ordre $n + 1$ et on construit ainsi facilement des tournois a-indécomposables d'ordres quelconques. A la différence des tournois indécomposables, les a-indécomposables ne sont pas nécessairement fortement connexes.

Notons enfin, grâce à l'Éq. (1), que pour savoir si un tournoi est a-indécomposable il suffit de comparer 2 à 2 les listes des successeurs en chaque sommet. La constitution de ces listes ainsi que leurs comparaisons se fait naïvement en $O(n^2)$. C'est le même ordre de complexité pour vérifier qu'un tournoi est indécomposable [5]. Enfin notons que la probabilité qu'un tournoi soit indécomposable tend vers 1 lorsque $n \to \infty$. Il en est de même pour la a-indécomposabilité.

3. Tournois critiquement a-indécomposables

Dans toute la suite, sauf indication contraire, T désignera un tournoi critiquement a-indécomposable. Cela suppose donc que pour tout sommet u, $T - u$ est a-décomposable et donc il existe deux sommets i_u et j_u de T qui ont mêmes

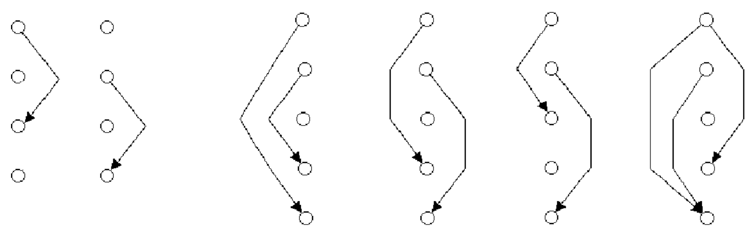

Fig. 1. Les arcs non représentés sont orientés de bas en haut. Sont représentés les deux 4-tournois a-indécomposables et les quatre 5-tournois a-indécomposables. Seul le 1[er] des 5-tournois est décomposable. Le 4$^{\text{ème}}$, noté $\overrightarrow{\mathcal{C}_2}$, est critiquement a-indécomposable. Les 2$^{\text{ème}}$ et 3$^{\text{ème}}$ sont critiquement indécomposables mais non critiquement a-indécomposables (voir définitions paragraphe 3).

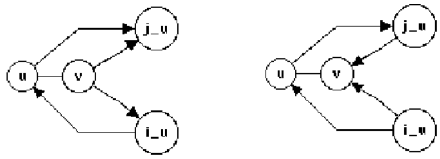

Fig. 2. L'arête uv peut être orientée au choix dans un des deux sens.

successeurs et prédécesseurs dans $T-u$. Construisons un nouveau graphe G dont les sommets sont ceux de T et les arêtes les $i_u j_u$. On vérifie facilement par l'absurde que

$$u=v \Leftrightarrow \{i_u, j_u\}=\{i_v, j_v\}. \tag{2}$$

Nous dirons que le sommet u et l'arête $i_u j_u$ sont associés. Par exemple, le graphe G associé au dernier 5-tournoi de la figure 1 est le cycle élémentaire de longueur 5. Notons que la définition même d'une arête associée entraîne que $u \notin \{i_u; j_u\}$. Le 1er lemme qui suit permet de comprendre comment G se construit et est la clef des preuves des résultats suivants.

Lemme 3.1. *Quel que soit u sommet de G, toute arête uv de G est associée à l'un des sommets i_u ou j_u.*

Démonstration. Supposons que $v=i_u$, que nous avons le chemin $v=i_u \to u \to j_u$ et notons w le sommet associé à l'arête uv. Quelle que soit l'orientation de l'arc uw, un des 2 chemins $i_u \to u \to w$ ou $j_u \to u \to w$ est créé. L'unicité de l'arête associée $i_u j_u$ entraîne $w=j_u$. Si $v \neq i_u$, comme i_u et j_u ont mêmes successeurs et prédécesseurs dans $T-u$, le sous-tournoi induit par u, v, i_u et j_u dans T est l'un des deux de la Fig. 2 et le résultat en découle. □

Lemme 3.2. *G ne contient pas d'étoile à 3 branches.*

Démonstration. On suppose qu'un sommet x de G est voisin dans G de 3 sommets u, v et w. D'après le lemme précédent chacune des 3 arêtes xu, xv et xw est donc associée à l'un des sommets i_x ou j_x. Ceci est impossible en vertu de l'équivalence (1). □

Comme G a autant de sommets que d'arêtes il contient au moins un cycle. Ce résultat associé au lemme précédent permet d'affirmer :

Lemme 3.3. *Les composantes connexes de G sont des cycles élémentaires sans corde.*

Enfin un dernier lemme précisant la structure de ces composantes :

Lemme 3.4. *Les 3 sommets u, i_u et j_u sont dans une même composante connexe C de G.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant que u n'est pas dans la même composante connexe que son arête associée. Les deux extrémités de n'importe quelle autre arête de G sont soit toutes les deux des successeurs soit toutes les deux des prédécesseurs de u. Ce résultat s'étend bien-sûr à toute chaîne de G, en particulier au complémentaire de $i_u j_u$ à C. On aboutit alors à la contradiction que i_u et j_u sont soit tous les deux des successeurs soit tous les deux des prédécesseurs de u. □

Proposition 3.5. *Les cycles de G sont de longueurs impaires.*

Démonstration. Notons $C=(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ un cycle de G et supposons que x_0 est associée à une arête $x_l x_{l+1}$. D'après le Lemme 3.1, l'arête $x_0 x_1$ est associé à x_{l+1} ou à x_l.

1er cas : supposons que ce soit à x_{l+1} et notons cette association $x_{l+1} \sim x_0 x_1$. On utilise le Lemme 3.1 pour itérer le processus. A partir de $\{x_0 \sim x_l x_{l+1}$ et $x_{l+1} \sim x_0 x_1\}$ on obtient successivement $\{x_1 \sim x_{l+1} x_{l+2}$ et $x_{l+2} \sim x_1 x_2\}$, $\{x_2 \sim x_{l+2} x_{l+3}$ et $x_{l+3} \sim x_2 x_3\}, \ldots$. Comme tout sommet de C doit être associé à une et une seule arête de C, le processus doit se terminer par $\{x_l \sim x_k x_0$ et $x_k \sim x_{l-1} x_l\}$. Donc k est pair et $k=2l$.

$2^{\text{ème}}$ cas : Le cas $x_l \sim x_0x_1$ engendre un processus impossible. En effet, seule une partie du cycle est parcourue, les sommets et les arêtes associées se rapprochant pour arriver à une situation où un sommet est associé à une arête dont il est une extrémité. $\square$

Caractérisons enfin les tournois critiquement a-indécomposables à l'aide des tournois circulants. Le tournoi circulant noté $\overrightarrow{\mathcal{C}_k}$ est le tournoi à $2k+1$ sommets dont les arcs sont les ij avec $1 \leqslant j-i \leqslant k$ où $j-i$ est considéré modulo $2k+1$. Étant donné un cycle $C = (x_0, x_1, \ldots, x_{2k})$ de G, la démonstration du lemme précédent montre que

$$\forall i \in \{0; \ldots; 2k\}, \quad x_i \sim x_{k+i}x_{k+i+1}$$

où $k+i$ et $k+i+1$ sont considérés modulo $2k+1$. On en déduit alors

Proposition 3.6. *Soit C est un cycle de G de longueur $2k+1$, le sous tournoi induit par les sommets de C dans T est $\overrightarrow{\mathcal{C}_k}$.*

En conclusion, l'ensemble des sommets d'un tournoi critiquement a-indécomposable est donc partitionnable en sous-ensembles induisant chacun un sous-tournoi circulant. Le tournoi étant critique les arcs entre deux quelconques de ces sous-tournois, disons T_1 et T_2, sont tous orientés dans le même sens, de T_1 vers T_2 ou de T_2 vers T_1. Ce résultat s'énonce formellement à l'aide de composition de tournois. Si t est un tournoi à n sommets et $T_1, \ldots, T_n$ n tournois quelconques, on note $t[T_1, \ldots, T_n]$ le tournoi obtenu à partir de t en remplaçant le $i^{\text{ème}}$ sommet par T_i de telle sorte que les arcs entre les sommets de T_i et ceux de T_j sont orientés dans le sens de l'arc ij de t. On a alors :

Théorème 3.7. *Les tournois critiquement a-indécomposables sont les tournois de la forme $t[\overrightarrow{\mathcal{C}_{k_1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathcal{C}_{k_p}}]$, où $p \in \mathbb{N}$, $(k_1, \ldots, k_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ et t est un tournoi quelconque à p sommets.*

En regard de [1], on peut donc affirmer que $\overrightarrow{\mathcal{C}_k}$ est l'unique tournoi à $2k+1$ sommets qui est à la fois critiquement a-indécomposable et critiquement indécomposable.

Références

[1] Y. Boudabbous, J. Dammak, P. Ille, Indecomposability and duality of tournaments, Discrete Math. 223 (2000) 55–82.
[2] P. Ille, Indecomposable graphs, Discrete Math. 173 (1997) 71–78.
[3] B. Jouve, Transitive convex subsets in large tournaments, Electronic Notes in Discrete Math., in press.
[4] J.F. Lalier, Tournament Solutions and Majority Voting, Springer, Berlin, 1997.
[5] R.M. McConnel, F. de Montgolfier, Linear-time modular decomposition of directed graphs, Discrete Appl. Math. 145 (2005) 189–209.
[6] V. Neumann-Lara, J. Urrutia, Vertex critical r-dichromatic tournaments, Discrete Math. 49 (1984) 83–87.
[7] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.