Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 491–496

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Les solutions élements finis des équations de Navier–Stokes périodiques en dimension trois sont « appropriées »

Jean-Luc Guermond [a,b]

[a] *Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843-3368, USA*
[b] *LIMSI (CNRS-UPR 3251), BP 133, Orsay 91403, France*

Reçu le 22 avril 2005 ; accepté après révision le 1er septembre 2005

Disponible sur Internet le 23 septembre 2005

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Les solutions faibles de Faedo–Galerkin des équations de Navier–Stokes en dimension trois dans le tore sont « appropriées », au sens de V. Sheffer, si elles sont construites à partir d'espaces de dimension finie possédant une propriété de commutateur discret et satisfaisant une certaine condition de compatibilité. Les espaces d'éléments finis de bas degré satisfont ces hypothèses. Cette question était ouverte depuis l'introduction de la notion de solution faible « appropriée ». ***Pour citer cet article : J.-L. Guermond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Finite-element-based Faedo–Galerkin weak solutions to the Navier–Stokes equations in the three-dimensional torus are suitable. It is shown that the limits of Faedo–Galerkin approximations of the Navier–Stokes equations in the three-dimensional torus are suitable weak solutions to the Navier–Stokes equations provided they are constructed using finite-dimensional spaces having a discrete commutator property and satisfying a proper inf–sup condition. Low order mixed finite element spaces appear to be acceptable for this purpose. This question was open since the notion of suitable solution was introduced. ***To cite this article: J.-L. Guermond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

This Note is concerned with the regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equation in the three-dimensional torus Ω.

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \nu \nabla^2 u = f \quad \text{in } Q_T, \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } Q_T, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u \text{ is periodic,} \end{cases} \tag{1}$$

Adresses e-mail : guermond@math.tamu.edu, guermond@limsi.fr (J.-L. Guermond).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.09.013

where $Q_T = \Omega\times(0,T)$. Henceforth we assume that the source term f is in $L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^3)$ and the initial data u_0 is in $H = \{v \in L^2(\Omega)^d;\ \nabla\cdot v = 0;\ v\cdot n \text{ is periodic}\}$.

To the present time, the best partial regularity result available is the so-called Caffarelli–Kohn–Nirenberg Theorem [4,7] proving that the one-dimensional Hausdorff measure of the set of singularities of a suitable weak solution is zero. One intriguing hypothesis on which this result is based is that the weak solution must be suitable in the following sense

Definition 0.1 (*Scheffer* [8]). Let $u \in L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)\cap L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^3)$, $p\in L^{5/4}(Q_T)$ be a weak solution to the Navier–Stokes equations. (u,p) is said to suitable if the local energy balance

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \nabla\cdot\left(\left(\frac{1}{2}u^2+p\right)u\right) - \nu\nabla^2\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \nu(\nabla u)^2 - f\cdot u \leqslant 0 \tag{2}$$

is satisfied in the distributional sense in Q_T.

Whether suitable weak solutions are indeed classical is still far from being clear.

Although it has been proved recently by He [6] that the result of the CKN Theorem also hods for weak solutions it is not known whether indeed weak solutions are suitable. In particular, are the solutions constructed by the Faedo–Galerkin method suitable? (see e.g. [1], [2, p. 77], [7, p. 245]). The purpose of the present work is to give a partial answer to this question which seems to have been open since Scheffer introduced the notion of suitable solutions. The main result of this Note is that, yes indeed, in the three-dimensional torus the Faedo–Galerkin weak solutions to the Navier–Stokes equations are suitable provided the finite-dimensional spaces involved in the construction have a discrete commutator property and satisfy a proper inf–sup condition. It is shown hereafter that, contrary to high order Fourier-based spectral methods, low order mixed finite element spaces are acceptable for this purpose.

To construct a Galerkin approximation to (1), we assume that we have at hand two families of finite-dimensional spaces, $\{X_h\}_{h>0}$, $\{M_h\}_{h>0}$ such that $X_h\subset [H^1_\#(\Omega)]^3$ and $M_h\subset L^2_{\int=0}(\Omega)$. The velocity is approximated in X_h and the pressure in M_h. To avoid technicalities we assume $M_h\subset L^2_{\int=0}(\Omega)\cap H^1_\#(\Omega)$.

Let $\pi_h : [L^2(\Omega)]^3\to X_h$ be the L^2-projection onto X_h. We assume that X_h and M_h are compatible in the sense that there exists $c>0$ independent of h such that

$$\forall q_h\in M_h,\quad \|\nabla q_h\|_{L^2}\leqslant c\|\pi_h\nabla q_h\|_{L^2}, \tag{3}$$

$$\forall v\in\left[H^1_\#(\Omega)\right]^3,\quad \|v-\pi_h v\|_{L^2} = \inf_{w_h\in X_h}\|v-w_h\|_{L^2}\leqslant ch\|v\|_{H^1}, \tag{4}$$

$$\forall v\in\left[H^1_\#(\Omega)\right]^3,\quad \|\pi_h v\|_{H^1}\leqslant c\|v\|_{H^1}. \tag{5}$$

We assume that there exists an interpolation operator $\mathcal{J}_h : H^2_\#(\Omega)\to M_h$ such that for all $q\in H^2_\#(\Omega)$

$$\left\|\nabla(q-\mathcal{J}_h q)\right\|_{L^2}\leqslant ch\|q\|_{H^2}. \tag{6}$$

In addition to the above interpolation properties, we assume that the following inverse inequality holds in X_h: There exists $c>0$ independent of h such that

$$\|v_h\|_{H^1}\leqslant ch^{-1}\|v_h\|_{L^2},\quad \forall v_h\in X_h. \tag{7}$$

Hypotheses (4)–(6), and (7) are standard; they are satisfied by most finite element settings. The only nontrivial hypothesis is (3); however, the following lemma holds

Lemma 0.2. *Hypothesis* (3) *holds in either one of the following situations*:

(i) *X_h is composed of $\mathbb{P}_1$-Bubble H^1-conforming finite elements and M_h is composed of $\mathbb{P}_1$ H^1-conforming finite elements* (*i.e., the so-called MINI element*).
(ii) *X_h is composed of $\mathbb{P}_2$ H^1-conforming finite elements and M_h is composed of $\mathbb{P}_1$ H^1-conforming finite elements* (*i.e., Hood–Taylor element*), *and no tetrahedron has more than* 3 *edges on* $\partial\Omega$.

We now define a skew-symmetric form of the nonlinear term as follows:

$$b_h(u,v,w)=\begin{cases}(u\cdot\nabla v+\frac{1}{2}v\nabla\cdot u,w), & \text{or}\\ \big((\nabla\times u)\times v+\frac{1}{2}\nabla\big(\mathcal{K}_h(u\cdot v)\big),w\big),\end{cases}\tag{8}$$

where $\mathcal{K}_h:L^2(\Omega)\to M_h$ is a linear L^2-stable interpolation operator (i.e., $\mathcal{K}_h z\to z$ for all $z\in L^2(\Omega)$).

The discrete problem we henceforth consider is as follows: Seek $u_h\in\mathcal{C}^0([0,T];X_h)$ with $\partial_t u_h\in L^2(0,T;X_h)$ and $p_h\in L^2([0,T];M_h)$ such that for all $v_h\in X_h$, all $q_h\in M_h$, and a.e. $t\in[0,T]$

$$\begin{cases}(\partial_t u_h,v_h)+b_h(u_h,u_h,v_h)-(p_h,\nabla\cdot v_h)+\nu(\nabla u_h,\nabla v_h)=\langle f,v_h\rangle,\\ (\nabla\cdot u_h,q)=0,\quad u_h|_{t=0}=\mathcal{I}_h u_0,\end{cases}\tag{9}$$

where $\mathcal{I}_h:L^2(\Omega)\to V_h$ is an L^2-stable interpolation operator; that is to say, $\mathcal{I}_h z\to z$ for all $z\in[L^2(\Omega)]^3$ (actually, weak convergence is enough). Note that for all v_h in X_h the approximate momentum equation holds in $L^2(0,T)$.

In addition to the usual a priori energy estimates

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_h(t)\|_{L^2}+\|u_h\|_{L^2(H^1)}\leqslant c,\tag{10}$$

the hypothesis (3) yields the following key estimate on the approximate pressure

Lemma 0.3. *Under the above assumptions, there exists c, independent of h, such that*

$$\|p_h\|_{L^{4/3}(0,T;L^2)}\leqslant c.\tag{11}$$

This estimate is obtained by a duality technique; it is obtained by testing the discrete momentum equation by $\pi_h\nabla(\psi_h(q))$, where $q\in H^2_\#(\Omega)$ and $\psi_h(q)\in M_h$ respectively solve

$$(\nabla q,\nabla\phi)=(p_h,\phi),\quad \forall\phi\in H^1_\#(\Omega),\tag{12}$$

$$\big(\pi_h\nabla\psi_h(q),\nabla r_h\big)=(\nabla q,\nabla r_h),\quad \forall r_h\in M_h.\tag{13}$$

Observe that (13) has a unique solution since the bilinear form $(\pi_h\nabla q_h,\nabla r_h)$ is coercive owing to hypothesis (3). The key idea is that $\nabla(-\nabla^2)^{-1}p$ is the test function that yields the same estimate as (11) at the continuous level and $\pi_h\nabla(\psi_h(q))$ is an approximation of this function.

To state the main result of this Note we now introduce the following

Definition 0.4. We say that X_h (resp. M_h) has the discrete commutator property if there exists an operator $P_h\in\mathcal{L}([H^1_\#(\Omega)]^3;X_h)$ (resp. $Q_h\in\mathcal{L}(L^2(\Omega);M_h)$) such that for all ϕ in $W^{2,\infty}_\#(\Omega)$ (resp. all ϕ in $W^{1,\infty}_\#(\Omega)$) and all $v_h\in X_h$ (resp. all $q_h\in M_h$)

$$\|\phi v_h-P_h(\phi v_h)\|_{H^l}\leqslant ch^{1+m-l}\|v_h\|_{H^m}\|\phi\|_{W^{m+1,\infty}},\quad 0\leqslant l\leqslant m\leqslant 1,$$
$$\|\phi q_h-Q_h(\phi q_h)\|_{L^2}\leqslant ch\|q_h\|_{L^2}\|\phi\|_{W^{1,\infty}}.$$

Standard H^1-conforming finite element spaces have the discrete commutator property (see [3]). This is not the case of Fourier-based approximation spaces since Fourier series do not have local interpolation properties.

The main result of the Note is stated in the following

Theorem 0.5. *Under the aboves hypotheses, if X_h and M_h have the discrete commutator property, the couple (u_h,p_h) convergences, up to subsequences, to a suitable solution to* (1).

The two technical parts of the proof are the passage to the limit in the pressure term $(p_h,P_h(u_h\phi))$ and in the nonlinear term $b_h(u_h,u_h,P_h(u_h\phi))$, where ϕ is an arbitrary smooth scalar-valued nonnegative function on Q_T. The passage to the limit in the pressure term relies on the pressure estimate (11) and that in the nonlinear term relies on the discrete commutator property. See [5] for details.

1. Introduction

Cette Note s'intéresse à la régularité des solutions faibles des équations de Navier–Stokes dans le tore Ω en dimension trois

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla p - \nu\nabla^2 u = f \quad \text{dans } Q_T, \\ \nabla\cdot u = 0 \quad \text{dans } Q_T, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u \text{ périodique}, \end{cases} \tag{1}$$

où $Q_T = \Omega\times(0,T)$. Le terme source f est dans $L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^3)$ et la donnée initiale u_0 est dans $H = \{v\in L^2(\Omega)^d;\ \nabla\cdot v = 0;\ v\cdot n \text{ est périodique}\}$.

Actuellement le meilleur résultat de régularité partiel connu est fourni par le théorème de Caffarelli–Kohn–Nirenberg [4,7]. Ce résultat affirme que la mesure de Hausdorff mono-dimensionnelle de l'ensemble des singularités des solutions faibles « appropriées » est nulle. L'hypothèse essentielle sur laquelle repose ce résultat est la notion de solution faible « appropriée » introduite par Sheffer :

Définition 1.1 (*Scheffer* [8]). Soit $u\in L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)\cap L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^3)$, $p\in L^{5/4}(Q_T)$ une solution faible des équations de Navier–Stokes. Le couple (u,p) est dit « approprié » s'il satisfait l'équilibre énergétique local suivant

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \nabla\cdot\left(\left(\frac{1}{2}u^2+p\right)u\right) - \nu\nabla^2\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \nu(\nabla u)^2 - f\cdot u \leqslant 0 \tag{2}$$

dans Q_T au sens des distributions.

Le résultat de Caffarelli–Kohn–Nirenberg soulève deux questions : 1) Est-ce que les solutions « appropriées » sont uniques ? 2) Est-ce que les solutions construites par la méthode de Faedo–Galerkin sont « appropriées » ? (voir e.g. [1], [2, p. 77], [7, p. 245]). L'objectif de cette Note est de répondre partiellement à la seconde question qui semble être restée ouverte depuis l'introduction de la notion de solution « appropriée ». Le résultat principal de la Note est que, oui en effet, en dimension trois dans le tore les solutions faibles de Faedo–Galerkin sont « appropriées » pourvu que les espaces d'approximation impliqués dans la construction satisfont une propriété de commutateur discret et une condition inf–sup non triviale. Contrairement à l'approximation de Fourier, les élémenst finis de bas degré satisfont l'hypothèse de commutateur discret.

2. L'approximation de Galerkin

Pour construire une approximation de Galerkin de (1), nous introduisons deux familles d'espaces de dimension finie $\{X_h\}_{h>0}$, $\{M_h\}_{h>0}$ tels que $X_h\subset[H^1_\#(\Omega)]^3$ and $M_h\subset L^2_{\int=0}(\Omega)$. La vitesse est approchée dans X_h et la pression est approchée dans M_h. Afin d'éviter des difficultées techniques non essentielles nous supposons de plus $M_h\subset L^2_{\int=0}(\Omega)\cap H^1_\#(\Omega)$. L'indice # signifie qu'on s'intéresse uniquement aux fonctions périodiques.

Soit $\pi_h:[L^2(\Omega)]^3\to X_h$ la projection L^2 sur l'espace discret des vitesses X_h. Nous supposons que X_h et M_h sont compatibles dans le sens suivant : Il existe $c>0$ independant de h tel que

$$\forall q_h\in M_h,\quad \|\nabla q_h\|_{L^2}\leqslant c\|\pi_h\nabla q_h\|_{L^2}. \tag{3}$$

Cette hypothèse est cruciale pour deduire une estimation a priori satisfaisante sur la pression. Nous supposons aussi que π_h a les propriétés d'interpolation et de stabilité suivantes :

$$\forall v\in\left[H^1_\#(\Omega)\right]^3,\quad \|v-\pi_h v\|_{L^2} = \inf_{w_h\in X_h}\|v-w_h\|_{L^2}\leqslant ch\|v\|_{H^1}, \tag{4}$$

$$\forall v\in\left[H^1_\#(\Omega)\right]^3,\quad \|\pi_h v\|_{H^1}\leqslant c\|v\|_{H^1}. \tag{5}$$

Nous supposons qu'il existe un opérateur d'interplation $\mathcal{J}_h: H^2_\#(\Omega)\to M_h$ tel que pour tout $q\in H^2_\#(\Omega)$

$$\left\|\nabla(q-\mathcal{J}_h q)\right\|_{L^2}\leqslant ch\|q\|_{H^2}. \tag{6}$$

En plus des propriétés d'interpolation, nous supposons finalement qu'il y a sur X_h une inégalité inverse du type suivant : Il existe $c > 0$ independant de h tel que

$$\|v_h\|_{H^1} \leqslant ch^{-1}\|v_h\|_{L^2}, \quad \forall v_h \in X_h. \tag{7}$$

Les hypotheses (4)–(6) et (7) sont standards ; elles sont satisfaites par la plupart des espaces d'élémenst finis. La seule hypothèse non triviale est (3) ; toutefois, on a le résultat suivant :

Lemme 2.1. *L'hypothese* (3) *est satisfaite dans les deux situations suivantes* :

(i) *X_h est composé d'éléments finis $\mathbb{P}_1$-Bulle H^1-conformes and M_h est composé d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ H^1-conformes.* (*i.e., l'élément MINI*).
(ii) *X_h est composé d'éléments finis $\mathbb{P}_2$ H^1-conformes et M_h est composé d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ H^1-conformes* (*i.e., l'élément de Hood–Taylor*)*, et aucun tétraèdre n'a plus de trois arêtes sur $\partial\Omega$.*

Nous définissons maitenant deux formes anti-symétriques admissibles du terme non linéaire :

$$b_h(u,v,w) = \begin{cases} (u\cdot\nabla v + \frac{1}{2}v\nabla\cdot u, w), & \text{ou bien} \\ \big((\nabla\times u)\times v + \frac{1}{2}\nabla\big(\mathcal{K}_h(u\cdot v)\big), w\big), \end{cases} \tag{8}$$

où $\mathcal{K}_h : L^2(\Omega) \to M_h$ est un opérateur d'interpolation stable L^2 (i.e., $\mathcal{K}_h z \to z$ pour tout $z \in L^2(\Omega)$). Cette hypothèse est standard. Elle est nécessaire pour assurer l'estimation d'énergie globale car le champ de vitesse u_h n'est pas nécessairement solenoidal.

Le problème discret que nous considérons est le suivant : Chercher $u_h \in \mathcal{C}^0([0,T]; X_h)$ avec $\partial_t u_h \in L^2(0,T; X_h)$ et $p_h \in L^2([0,T]; M_h)$ tels que pour tout $v_h \in X_h$, tout $q_h \in M_h$ et presque tout $t \in [0,T]$

$$\begin{cases} (\partial_t u_h, v_h) + b_h(u_h, u_h, v_h) - (p_h, \nabla\cdot v_h) + \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) = \langle f, v_h\rangle, \\ (\nabla\cdot u_h, q) = 0, \quad u_h|_{t=0} = \mathcal{I}_h u_0, \end{cases} \tag{9}$$

où $\mathcal{I}_h : L^2(\Omega) \to V_h$ est un opérateur d'interpolation stable L^2 ; c'est-à-dire, $\mathcal{I}_h z \to z$ pour tout $z \in [L^2(\Omega)]^3$ (en fait la convergence faible est suffisante). Noter que l'équation de bilan de quantité de mouvement discret est satisfaite dans $L^2(0,T)$.

3. Le résultat

En plus de l'estimation d'énergie habituelle

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\big\|u_h(t)\big\|_{L^2} + \|u_h\|_{L^2(H^1)} \leqslant c, \tag{10}$$

l'hypothèse (3) permet de déduire l'estimation sur la pression suivante :

Lemme 3.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe c, independant de h, tel que*

$$\|p_h\|_{L^{4/3}(0,T;L^2)} \leqslant c. \tag{11}$$

Cette estimation est obtenue par dualité. On teste le bilan de quantité de mouvement discret par $\pi_h\nabla(\psi_h(q))$, où $q \in H^2_\#(\Omega)$ et $\psi_h(q) \in M_h$ sont respectivement solutions de

$$(\nabla q, \nabla\phi) = (p_h, \phi), \quad \forall\phi \in H^1_\#(\Omega), \tag{12}$$
$$\big(\pi_h\nabla\psi_h(q), \nabla r_h\big) = (\nabla q, \nabla r_h), \quad \forall r_h \in M_h. \tag{13}$$

Noter que (13) a une solution unique puisque la forme bilinéaire $(\pi_h\nabla q_h, \nabla r_h)$ est coercive grace à l'hypothese (3). L'idée principale derrière l'estimation (11) est que $\nabla(-\nabla^2)^{-1}p$ est la fonction test qui produit la même estimation que (11) dans le cas continu et $\pi_h\nabla(\psi_h(q))$ est une approximation de cette fonction.

Nous introduisons maintenant la seconde hypothèse déterminante :

Définition 3.2. Nous disons que X_h (resp. M_h) a la propriété du commutateur discret s'il existe un opérateur d'interpolation $P_h \in \mathcal{L}([H^1_\#(\Omega)]^3; X_h)$ (resp. $Q_h \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); M_h)$) tel que pour tout ϕ dans $W^{2,\infty}_\#(\Omega)$ (resp. tout ϕ dans $W^{1,\infty}_\#(\Omega)$) et tout $v_h \in X_h$ (resp. tout $q_h \in M_h$)

$$\begin{aligned} &\left\|\phi v_h - P_h(\phi v_h)\right\|_{H^l} \leqslant ch^{1+m-l}\|v_h\|_{H^m}\|\phi\|_{W^{m+1,\infty}}, \quad 0 \leqslant l \leqslant m \leqslant 1,\\ &\left\|\phi q_h - Q_h(\phi q_h)\right\|_{L^2} \leqslant ch\|q_h\|_{L^2}\|\phi\|_{W^{1,\infty}}. \end{aligned}$$

Les espaces d'éléments finis H^1-conformes standards ont la propriété du commutateur discret (see [3]). Ce n'est pas le cas de l'approximation de Fourier car les séries de Fourier n'ont pas la propriété d'interpolation locale.

Nous donnons maintenant le résulat qui fait l'objet de cette Note :

Théorème 3.3. *Sous les hypothèse ci-dessus, si X_h et M_h ont la propriété du commutateur discret, le couple (u_h, p_h) converge, à des sous-suites près, vers une solution faible « appropriée » de* (1)*.*

La preuve consiste à tester le bilan de quantité de mouvement par $P_h(u_h\phi)$ où ϕ est une fonction scalaire régulière positive sur Q_T et à passer à la limite pour $h \to 0$. Les deux points techniques de la preuve sont le passage à la limite dans le terme de pression $(p_h, P_h(u_h\phi))$ et le terme non linéaire $b_h(u_h, u_h, P_h(u_h\phi))$. Le passage à la limite sur le terme de pression repose sur l'estimation (11) et le passage à la limite sur le terme non linéaire respose sur la propriété de commutateur discret. Voir [5] pour les détails de la preuve.

Ce résultat semble souligner une différence de comportement essentielle entre les approximations spectrales (i.e., globale) et les approximations locales. Les approximations globales ont besoin de régularisation ou d'hyperviscosités (Simulation des Grandes Echelles ou *Large Eddy Simulation* ?) pour converger à la limite vers une solution « appropriée » alors qu'il suffit de rendre le terme non linéaire anti-symétrique pour atteindre des solutions « appropriées » avec des techniques d'approximation ayant des propriétés d'interpolation locales (les éléments finis de bas degré par exemple). Il semble que ce soit le phénomène de Gibbs qui soit en cause ici.

L'extension du Théorème 3.3 au cas des conditions aux limites de Dirichlet sur la vitesse ne semble pas triviale, car la projection L^2 de $[H^1(\Omega)]^3$ sur X_h n'est plus stable dans $[H^1(\Omega)]^3$ et converge uniquement en $h^{1/2}$ dans $[L^2(\Omega)]^3$, i.e., il y a une couche limite à la frontière.

Références

[1] H. Beirão da Veiga, On the construction of suitable weak solutions to the Navier–Stokes equations via a general approximation theorem, J. Math. Pures Appl. (9) 64 (3) (1985) 321–334.

[2] H. Beirão da Veiga, On the suitable weak solutions to the Navier–Stokes equations in the whole space, J. Math. Pures Appl. (9) 64 (1) (1985) 77–86.

[3] S. Bertoluzza, The discrete commutator property of approximation spaces, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 329 (12) (1999) 1097–1102.

[4] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math. 35 (6) (1982) 771–831.

[5] J.-L. Guermond, Finite-element-based Faedo–Galerkin weak solutions to the Navier–Stokes equations in the three-dimensional torus are suitable, J. Math. Pures Appl. (2005), in press.

[6] C. He, On partial regularity for weak solutions to the Navier–Stokes equations, J. Funct. Anal. 211 (1) (2004) 153–162.

[7] F. Lin, A new proof of the Caffarelli–Kohn–Nirenberg theorem, Comm. Pure Appl. Math. 51 (3) (1998) 241–257.

[8] V. Scheffer, Hausdorff measure and the Navier–Stokes equations, Comm. Math. Phys. 55 (2) (1977) 97–112.