Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 461–464
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique/Équations aux dérivées partielles

Une redécouverte de l'équation de Korteweg–de Vries et de Kadomtsev–Petviashvili

Tadayoshi Kano [a,b], Takaaki Nishida [c]

[a] *Département de mathématiques, Université d'Osaka, Toyonaka, 5600043, Japon*
[b] *Department of Mathematics, City University of Hong Kong, Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong*
[c] *Département de mathématiques, Université de Kyoto, Kyoto, 6068502, Japon*

Reçu le 16 mars 2005 ; accepté le 21 juin 2005

Disponible sur Internet le 13 septembre 2005

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On a découvert le flux des équations des ondes longues à la surface de l'eau, se propageant dans chacune des directions caractéristiques de l'équation des cordes vibrantes, première approximation, approché par les solutions de l'équation de Korteweg–de Vries. Dans l'écoulement tridimensionnel, le phénomène est de même ordre pour l'équation de Kadomtsev–Petviashvili. ***Pour citer cet article : T. Kano, T. Nishida, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

A new discovery of Korteweg–de Vries and Kadomtsev–Petviashvili equation. We show that the flux of long waves of water surface, propagating in each characteristic direction of the equations for a vibrating string, to a first approximation, are close to the solutions of the Korteweg–de Vries equation. In a three dimensional flow, the phenomenon is of the same order as the Kadomtsev–Petviashvili equation. ***To cite this article: T. Kano, T. Nishida, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

On sait maintenant que des ondes solitaires découvertes par John Scott Russell en 1834 [10] et des ondes longues à la surface de l'eau de Korteweg–de Vries sont caractérisées [7,12] (voir aussi [11]) par :

($*$) *le carré du rapport de la profondeur de l'eau à la longeur des ondes et le rapport de l'amplitude des ondes à la profondeur de l'eau sont de même ordre comme infinitésimaux lorsque la longeur des ondes tend vers l'infini et l'amplitude tend vers zéro.*

L'équation des cordes vibrantes étant la première approximation pour des ondes longues à la surface de l'eau, nous avons montré effectivement [7] que les ondes longues se propageant dans une direction caractéristique de cette

Adresses e-mail : a_11.9.1973@apost.plala.or.jp (T. Kano), nish@math.kyoto-u.ac.jp (T. Nishida).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.08.006

équation sont approchées par les solutions de l'équation de Korteweg–de Vries [8] (l'équation de KdV, ci-après). Mais pour les ondes se propageant dans la direction d'une autre caractéristique, l'approximation était moins precise, l'équation approchée ayant un second membre.

Dans cette Note, on donne deux équations de KdV approchant des ondes longues à la surface de l'eau se propageant dans la direction de chaque caractéristique de l'équation des cordes vibrantes, la première approximation.

2. Les équations du problème

Les ondes à la surface de l'eau sont régies par les équations suivantes pour le potentiel de vitesses Φ, $\operatorname{grad}\Phi = (u, v, w)$, (u, v, w) étant le champ de vecteurs vitesses, Γ la fonction de profile des ondes et g la pesanteur :

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega_t = \left\{(x, y, z)\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < z < \Gamma(t, x, y),\ t > 0\right\}, \tag{1}$$

$$\Phi_z = 0, \quad z = 0, \tag{2}$$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + gz = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = \Gamma(t, x, y), \tag{3}$$

$$\Gamma_t + \Gamma_x\Phi_x + \Gamma_y\Phi_y - \Phi_z = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = \Gamma(t, x, y), \tag{4}$$

avec données de Cauchy :

$$\Phi(0, x, y, z) = \Phi_0(x, y, z)\colon \text{ harmonique}, \qquad \Gamma(0, x, y) = \Gamma_0(x, y) > 0. \tag{5}$$

Pour les ondes en écoulement bidimensionnel, le changement de variables suivant définit les variables sans dimension, avec le signe prime :

$$(t, x, y) = \left(\frac{\lambda}{c}t', \lambda x', hy'\right), \qquad (\Gamma, \Phi) = (h\Gamma', c\lambda\Phi'), \tag{\#}$$

où h est la profondeur de l'eau au repos et λ : la longeur des ondes, $c =$ la racine carrée de gh, la vitesse du son. D'après (#), le système d'équations sans dimension pour les ondes longues caracterisées par $(*)$ en haut, pour le potentiel ϕ et la fonction de profile des ondes γ définies par :

$$\Phi = -t + \delta^2\phi, \qquad \Gamma = 1 + \delta^2\gamma, \tag{6}$$

on supprime le signe prime des variables, avec $\delta = h/\lambda$:

$$\delta^2\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_t = \left\{(x, y)\colon x \in \mathbb{R}^1,\ 0 < y < 1 + \delta^2\gamma(t, x),\ t > 0\right\}, \tag{7}$$

$$\phi_y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ y = 0, \tag{8}$$

$$\left(\phi_t + \frac{1}{2}\delta^2\phi_x^2 + y\right) + \frac{1}{2}\phi_y^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ y = 1 + \delta^2\gamma(t, x), \tag{9}$$

$$\gamma_t + \delta^2\gamma_x\phi_x - \frac{1}{\delta^2}\phi_y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ y = 1 + \delta^2\gamma(t, x). \tag{10}$$

Ce sont des ondes petites, mais finies.

3. Théorie proposée

Notre théorie développée dans [6,7] dépendait de deux propriétés :

(i) Le théorème d'existence de solutions analytiques (pour un temps fini) ; le problème de Cauchy (1)–(5) avait été résolu pour [5,2] dans l'échelle d'espaces de Banach de fonctions analytiques [9] :

$$S = \bigcup_{\rho > 0} X_\rho, \quad X_\rho : \text{l'espaces de Banach muni de norme } \|u\|_\rho\ ;$$

et nous nous considérons l'ordre par rapport au paramètre δ au sens de cette norme.

(ii) Les solutions dépendent d'une manière indéfiniment différentiable par rapport à δ.

Nous savons donc que le développement asymptotique par rapport à ce paramètre δ des ondes à la surface de l'eau, donné par Friedrichs en 1948 [1], est mathématiquement justifié au moins pour les solutions analytiques. Nous avons en effet pour ϕ et γ les développements asymptotiques suivants [7,4] :

$$u_t + \gamma_x + \delta^2 u u_x - \delta^4 u_x u_{xx} - \delta^6 \left(\gamma u_x^2 + \frac{1}{3} u_x u_{xxx}\right)_x = \mathrm{O}(\delta^8), \quad u = \phi_x(t, x, 1 + \delta^2\gamma), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\gamma_t + u_x + \delta^2 \left((\gamma u)_x + \frac{1}{3} u_{xxx}\right) + \delta^4 \left((\gamma u_x)_{xx} + \frac{2}{15} u_{xxxxx}\right) + \delta^6 \Big((\gamma^2 u_x)_{xx} + \frac{1}{3}\gamma_{xxxx} u_x + \frac{4}{3}\gamma_{xxx} u_{xx} \\ + \frac{7}{3}\gamma_{xx} u_{xxx} + 2\gamma_x u_{xxxx} + \frac{2}{3}\gamma u_{xxxxx} + \frac{17}{315} u_{xxxxxxx}\Big) = \mathrm{O}(\delta^8),\end{aligned} \tag{12}$$

On voit donc immédiatement que l'équation des cordes vibrantes,

$$\bar{u}_t + \bar{\gamma}_x = 0, \qquad \bar{\gamma}_t + \bar{u}_x = 0, \tag{13}$$

donne la première approximation à l'ordre δ^2.

Maintenant, définissons p et q par :

$$p = u + \delta^2 \left(D(\gamma u) + \frac{B}{3} u_{xx}\right), \quad q = \gamma, \tag{14}$$

avec $1 - 4D = 0$ et $B = 1/2$, et f et g par $2f = q + p$, $2g = q - p$.

Alors on voit que f et g, respectivement, satisfont aux équations :

$$f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3 f f_x + \frac{1}{3} f_{xxx}\right) = \mathrm{O}(\delta^4), \qquad g_t - g_x - \frac{\delta^2}{2}\left(3 g g_x + \frac{1}{3} g_{xxx}\right) = \mathrm{O}(\delta^4). \tag{15}$$

On voit en effet que des ondes longues f et g, avec conditions initiales telles que

$$f(0) = \mathrm{O}(1), \qquad g(0) = \mathrm{O}(\delta^2), \tag{16}$$

par rapport à δ et se propageant dans la direction de chaque caractéristique de la premère équation approchée (13) sont approchée, à l'erreur d'ordre de δ^4, par les solutions de l'équation de KdV :

$$F_t + F_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3 F F_x + \frac{1}{3} F_{xxx}\right) = 0, \qquad G_t - G_x - \frac{\delta^2}{2}\left(3 G G_x + \frac{1}{3} G_{xxx}\right) = 0, \tag{17}$$

respectivement, compte tenu du fait que $g(t)$ est d'ordre de δ^2 pour $t > 0$, d'après la dépendence continue des solutions pour (15) par rapport aux données initiales et au second membre.

Les approximations d'ordre supérieur seront établies dans un article en préparation, Hashimoto et Kano : Sur les équations de Korteweg–de Vries d'ordre supérieur approchant des ondes longues à la surface de l'eau en écoulement bidimensionnel.

4. Équations de Kadomtsev–Petviashvili

En reprenant exactement le même ordre d'idées que ci-dessus pour l'équation de KdV, dans cette section on donne les équations de Kadomtsev–Petviashvili approchant les ondes longues en écoulement tridimensionnel se propageant dans les directions des deux caractéristiques de l'équation linéaire des ondes qui est la première approximation, supprimant ainsi les mêmes défauts dans [3] que les nôtres pour l'équation de KdV cidessus.

En écoulement tridimensionnel, on reprend les équations (1)–(5). Ce problème de Cauchy a été résolu dans une échelle d'espaces de Banach de fonctions analytiques, voir [2]. Considérons maintenant le changement de variables pour obtenir les équations sans dimension :

$$(t, x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{c} t', \lambda x', L y', h z'\right), \qquad (\Phi, \Gamma) = (c\lambda\Phi', h\Gamma'), \tag{18}$$

introduisons les paramètres $\delta = h/\lambda = \lambda/L$, $\varepsilon = \alpha/h$, α : l'amplitude des ondes, L : la longeur d'ondes dans la direction de l'axe y, les autres étant les mêmes que ci-dessus. D'après (18) avec la condition « simplifiée » que $\delta^2 = \varepsilon$, on obtient les équations sans dimension d'ondes longues pour ϕ et γ définies par :

$$\Phi = -t + \delta^2\phi, \qquad \Gamma = 1 + \delta^2\gamma, \tag{19}$$

soit en omettant le signe prime :

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\delta^2\phi_x^2 + \delta^4\phi_y^2 + \phi_z^2) + \gamma = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = 1 + \delta^2\gamma(t, x, y), \tag{20}$$

$$\gamma_t + \delta^2\gamma_x\phi_x + \delta^4\gamma_y\phi_y - \frac{1}{\delta^2}\phi_z = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z = 1 + \delta^2\gamma(t, x, y). \tag{21}$$

Or, nous avons, voir [2,3], l'expression des dérivées normales du potentiel ϕ à partir des valeurs des dérivées tangentielles sur la surface de l'eau comme développement asymptotique par rapport au paramètre δ :

$$\bar\phi_z = -\delta^2\bar\phi_{xx} - \delta^4\left(\gamma\bar\phi_{xx} + \frac{1}{3}\bar\phi_{xxxx} + \bar\phi_{yy}\right) + \mathrm{O}(\delta^6), \quad \text{où } \bar\phi_z = \phi_z\big(t, x, y, 1 + \delta^2\gamma(t, x, y)\big), \text{etc.} \tag{22}$$

Posons maintenant :

$$P = u + \delta^2\left(D(\gamma u) + \frac{B}{3}u_{xx}\right) + \delta^2 M\int^x \bar\phi_{yy}\,\mathrm{d}x, \quad Q = \gamma, \text{ avec } u = \bar\phi_x,\ v = \bar\phi_y. \tag{23}$$

On obtient alors, pour f, g définies par $2f = Q + P$, $2g = Q - P$, les deux équations suivantes :

$$\left(f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}\right) + \frac{\delta^2}{2}\int^x f_{yy}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{O}(\delta^4), \tag{24}$$

$$\left(g_t - g_x - \frac{\delta^2}{2}\left(3gg_x + \frac{1}{3}g_{xxx}\right) - \frac{\delta^2}{2}\int^x g_{yy}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{O}(\delta^4), \tag{25}$$

avec $4D - 1 = 0$ et $B = M = 1/2$ avec les conditions telles que (16). Les fonctioons f et g sont approchées respectivement par les solutions des équations de Kadomtsev–Petviashvili suivantes, comme on a montré dans [3] :

$$\left(F_t + F_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3FF_x + \frac{1}{3}F_{xxx}\right)\right)_x + \frac{\delta^2}{2}F_{yy} = 0, \tag{26}$$

$$\left(G_t - G_x - \frac{\delta^2}{2}\left(3GG_x + \frac{1}{3}G_{xxx}\right)\right)_x - \frac{\delta^2}{2}G_{yy} = 0. \tag{27}$$

Références

[1] K.-O. Friedrichs, On the derivation of the shallow water theory, Appendix to: "The formation of breakers and bores" by J.J. Stoker, Comm. Pure Appl. Math. 1 (1948) 1–87.
[2] T. Kano, Une théorie trois-dimensionnelle des ondes de surface de l'eau et le développement de Friedrichs, J. Math. Kyoto Univ. 26 (1986) 101–155 et 157–175.
[3] T. Kano, L'équation de Kadomtsev–Petviashvili approchant des ondes longues de surface de l'eau en écoulement trois-dimensionnel, in: Patterns and Waves—Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations, in: Stud. Math. Appl., vol. 18, North-Holland, 1986, pp. 431–444.
[4] T. Kano, Higher KdV equations approximating long waves of two-dimensional water surface, RIMS Kyoto Univ. Koukyuroku 1322 (2003) 115–125.
[5] T. Kano, T. Nishida, Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J. Math. Kyoto Univ. 19 (1979) 335–370.
[6] T. Kano, T. Nishida, Water waves and Friedrichs expansion, in: Lecture Notes Numer. Appl. Anal., vol. 6, Kinokuniya–North Holland, 1983, pp. 39–57.
[7] T. Kano, T. Nishida, A mathematical justification for Korteweg–de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves, Osaka J. Math. 23 (1986) 389–413.
[8] D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of the form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of water surface waves, Philos. Magazine 39 (1895) 422–443.
[9] L.V. Ovsjannikov, Problème de Cauchy non-linéaire dans l'échelle d'espaces de Banach, Dokl. Akad. Nauk URSS 200 (1971) 789–792.
[10] J. Scott Russell, Report on waves, in: Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science Held at York in September 1844, John Murray, London, 1845, pp. 311–390.
[11] G.G. Stokes, On the theory of oscillatory waves, Trans. Cambridge Philos. Soc. 8 (1847) 441–455.
[12] F. Ursell, The long wave paradox in the theory of gravity waves, Proc. Philos. Soc. Cambridge 49 (1953) 685–694.