Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 247–252
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Détermination du rang des tissus du plan et autres invariants géométriques

Olivier Ripoll

LaBAG, UMR 5467, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France

Reçu le 10 janvier 2005 ; accepté après révision le 9 juillet 2005

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d-tissu non singulier du plan présenté par une équation différentielle du premier ordre à coefficients dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ de la forme $F(x, y, y') := a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \cdots + a_d(x, y) = 0$, avec $d \geqslant 3$ et dont on note (E, ∇) sa connexion associée. Nous montrons que la trace de la courbure de (E, ∇) est la somme des courbures de Blaschke des 3-tissus extraits. En outre nous indiquons comment la courbure rend compte de la linéarisabilité du tissu $\mathcal{W}(d)$. Notre résultat principal est un procédé explicite de détermination pour d quelconque du rang de $\mathcal{W}(d)$, à partir des coefficients de F. En application, nous retrouvons également des résultats connus en géométrie des tissus. ***Pour citer cet article : O. Ripoll, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Determination of the rank of planar webs and other geometrical invariants. Let $\mathcal{W}(d)$ be a non singular d-web in the plane with $d \geqslant 3$, presented by a first order differential equation of the type $F(x, y, y') := a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \cdots + a_d(x, y) = 0$, where $a_i \in \mathbb{C}\{x, y\}$ and let (E, ∇) be the connection associated with F. We show that the trace of its curvature is the sum of the Blaschke curvatures of extracted 3-webs of $\mathcal{W}(d)$. Our main result is an explicit determination of the rank of $\mathcal{W}(d)$. We also recover some well known results in web geometry. ***To cite this article: O. Ripoll, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

Let $\mathcal{W}(d)$ be a non singular d-web in $(\mathbb{C}^2, 0)$, *presented* by a first order differential equation with analytic coefficients $F(x, y, y') := a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \cdots + a_d(x, y) = 0$. This *implicit* presentation leads to an explicit study of some invariants of the web $\mathcal{W}(d)$ as the rank, and fits in with the geometric study of differential equations.

Adresse e-mail : oripoll@math.u-bordeaux1.fr (O. Ripoll).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.07.007

Using the connection (E, ∇) associated with F and introduced in [4], we can first interpret some of the coefficients of its curvature matrix. We prove for at least $d = 4$, 5 and 6, that the *Blaschke–Chern curvature* of $\mathcal{W}(d)$, which is the trace of the curvature K of (E, ∇), is an invariant of the web, i.e. it only depends on the web and not on the presentation chosen. Furthermore, we have the following theorem

Theorem 0.1 (Trace formula). *The Blaschke–Chern curvature of a d-web $\mathcal{W}(d)$ is the sum of all the Blaschke curvatures of extracted* 3*-webs of $\mathcal{W}(d)$, for at least $d = 4$,* 5 *and* 6.

Interpreting the coefficients of the connection matrix in any adapted basis, we can show that for a non singular planar 4-web, there exists an adapted basis where the following expression of the curvature matrix holds:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & \partial_x(k_1) + L_1 & \partial_y(k_1) + L_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

where $L_1 = L_2 = 0$ are the conditions for a 4-web to be linearisable (cf. [3]). Hence we can deduce from this the Poincaré theorem: *A* 4*-web of maximal rank is linearisable*.

In the classical case where two families of leaves of $\mathcal{W}(4)$ are respectively given by $x = const.$ and by $y = const.$, the previous methods still hold and we get an explicit expression of the coefficients of the curvature matrix, involving the Blaschke curvatures of extracted 3-webs. This allows us to prove once again the trace formula and other results.

In the general case of a d-web $\mathcal{W}(d)$, the existence of an adapted basis of (E, ∇) gives just one integrability relation, leading to the construction of a matrix $(k_{m\ell})$ of dimension π_d with coefficients in $\mathbb{C}\{x, y\}$ which gives explicitly the rank of $\mathcal{W}(d)$. Precisely, using the special construction of this matrix, and the fact that $\operatorname{Ker}\nabla$ is a local system, we obtain, thanks to Nakayama's lemma, the following result:

Theorem 0.2 (Determination of the rank of a non singular planar d-web). *The following equality holds*: $\overline{K} := \operatorname{Ker}(k_{m\ell}) = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}\nabla$, *and in particular,* $\operatorname{rank}\mathcal{W}(d) = \operatorname{corank}(k_{m\ell})$.

For instance, this result allows us to recover a weak version of a theorem due to Bol: *A hexagonal* 4*-web is of maximal rank*.

1. Introduction à la géométrie des tissus du plan

La géométrie des tissus est consacrée à l'étude des propriétés géométriques des familles de feuilletages en position générale. Soit $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$ l'anneau des séries convergentes à coefficients complexes à deux variables. Un d-tissu $\mathcal{W}(d)$ non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est la donnée d'une famille de *feuilles*, germes de courbes de niveau $\{F_i(x, y) = cste\}$ où $F_i \in \mathcal{O}$ vérifie $F_i(0) = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, et satisfaisant l'hypothèse de position générale $\mathrm{d}F_i(0) \wedge \mathrm{d}F_j(0) \neq 0$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant d$. On considère une équation différentielle du premier ordre de la forme (1) suivante :

$$F(x, y, y') := a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \cdots + a_d(x, y) = 0 \tag{1}$$

où $F(x, y, p) \in \mathcal{O}[p]$ est sans facteurs multiples et telle que $a_0 \neq 0$. On note $R \in \mathcal{O}$ le p-résultant de F avec $R = (-1)^{d(d-1)/2} \cdot a_0 \cdot \Delta$ où Δ est son p-discriminant. En dehors du lieu $\{R = 0\}$, les d courbes intégrales d'une équation différentielle de la forme (1) définissent un d-tissu non singulier, en vertu du théorème de Cauchy. Réciproquement, quitte à effectuer un changement de variables, la donnée d'un d-tissu non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ permet de construire une équation différentielle $F(x, y, y') := \prod_{i=1}^{d}(\partial_y(F_i)y' + \partial_x(F_i)) = 0$ de la forme (1) vérifiant $R(0) \neq 0$ et dont les d solutions au voisinage de 0 ont les pentes des feuilles du tissu $p_i(x, y) := -\partial_x(F_i)/\partial_y(F_i) \in \mathcal{O}$.

Ainsi, tout tissu du plan est *implicitement présenté* par une équation différentielle F de la forme (1), à un inversible près. Cette approche ne privilégie aucune des feuilles du tissu et s'inscrit dans le cadre de l'étude géométrique des équations différentielles. Cette étude sera locale, au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ et l'on suppose *désormais* que $R(0) \neq 0$.

• *Invariants des tissus du plan*. Soit $\mathcal{A}(d)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des *relations abéliennes* du tissu non singulier $\mathcal{W}(d)$ liant les normales aux feuilles et à coefficients constants sur celles-ci, défini par

$$\mathcal{A}(d) := \left\{ \big(g_1(F_1), \ldots, g_d(F_d)\big) \in \mathcal{O}^d \text{ tel que } (g_i)_{i=1,\ldots,d} \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^{d} g_i(F_i)\, \mathrm{d}F_i = 0 \right\}.$$

On a la majoration classique *optimale* suivante : $\operatorname{rg}\mathcal{W}(d) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(d) \leqslant \pi_d := \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

L'entier $\operatorname{rg}\mathcal{W}(d)$ défini ci-dessus est appelé le *rang* du tissu non singulier $\mathcal{W}(d)$; nous verrons qu'en général, le rang d'un tissu est nul. Le rang est un *invariant du tissu* au sens suivant : il ne dépend que de $\mathcal{W}(d)$ et non du choix des fonctions F_i, ou de l'équation différentielle qui le présente, c'est-à-dire du polynôme $F \in \mathcal{O}[p]$. Cet entier est aussi invariant par l'action des isomorphismes analytiques locaux de $\mathbb{C}^2$. Comme cela se justifiera par la suite, on retiendra plutôt ici la notion d'invariant du tissu, dont l'exemple type pour un tissu $\mathcal{W}(3)$ est la *courbure de Blaschke*.

On dit qu'un d-tissu $\mathcal{L}(d)$ est *linéaire* si toutes ses feuilles sont des germes de droites. Un tissu *algébrique* $\mathcal{L}_C(d)$ est un tissu linéaire donné par dualité par une courbe algébrique réduite C de $\mathbb{P}^2$. Si $P(s,t) = 0$ est une équation affine de C, on vérifie que dans un système de coordonnées convenables, le tissu $\mathcal{L}_C(d)$ est présenté par l'équation $F(x,y,p) = P(y - px, p) = 0$. Un théorème d'Abel permet alors de montrer que les tissus algébriques sont de rang maximal π_d. Dans [2], Chern et Griffiths ont d'ailleurs plus largement illustré le lien existant entre la géométrie des tissus et la géométrie algébrique.

La détermination du rang d'un tissu non singulier quelconque n'était effective que dans le cas d'un 3-tissu $\mathcal{W}(3)$. On sait en effet depuis les travaux de Blaschke [1] qu'il existe une 1-forme γ vérifiant la relation $\mathrm{d}\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$ où $\omega_i = \rho_i\, \mathrm{d}F_i$, avec $\rho_i \in \mathcal{O}^*$ et $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. La 2-forme $\mathrm{d}\gamma$ est, contrairement à γ, un invariant du tissu appelée *courbure de Blaschke* de $\mathcal{W}(3)$. On a alors l'équivalence suivante : $\operatorname{rg}\mathcal{W}(3) = 1$ *si et seulement si* $\mathrm{d}\gamma = 0$.

Nous proposons dans cette Note une méthode explicite pour déterminer le rang d'un d-tissu du plan non singulier quelconque, ainsi que l'interprétation d'autres invariants du tissu. Notre point de départ sera la connexion associée à un d-tissu introduite par Hénaut dans [4] ainsi que les invariants naturels qu'elle engendre.

• *Relations abéliennes* via *l'annulation d'une trace, et connexion associée* (cf. [4]). Soient $d \geqslant 3$ et $\mathcal{W}(d)$ un d-tissu non singulier présenté par F de la forme (1) et $S = \{F(x,y,p) = 0\}$ la surface lisse associée, munie de la projection canonique $\pi : S \to (\mathbb{C}^2, 0)$ induite par $(x,y,p) \to (x,y)$.

Soit $(\Omega_S^\bullet, d)$ le complexe de de Rham des formes différentielles sur S. La formule d'interpolation de Lagrange notamment permet de montrer qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(d)$ dans

$$\mathfrak{a}_F = \left\{ \omega = \big(b_3 \cdot p^{d-3} + b_4 \cdot p^{d-4} + \cdots + b_d\big) \cdot \frac{\mathrm{d}y - p\,\mathrm{d}x}{\partial_p(F)} \in \pi_*\big(\Omega_S^1\big),\ b_i \in \mathcal{O} \text{ telle que } \mathrm{d}\omega = 0 \right\},$$

grâce auquel une relation abélienne est vue comme l'annulation de la trace d'un élément de $\mathfrak{a}_F$ relativement au revêtement π de degré d.

Grâce à la fermeture des éléments de $\mathfrak{a}_F$ et par identification polynomiale, l'espace $\mathfrak{a}_F$ est uniquement déterminé par les solutions analytiques b_i du système différentiel linéaire homogène $\mathcal{M}(d)$ suivant :

$$\mathcal{M}(d) \quad \begin{cases} \partial_x(b_d) + A_{1,1} \cdot b_3 + \cdots + A_{1,d-2} \cdot b_d = 0, \\ \partial_x(b_{d-1}) + \partial_y(b_d) + A_{2,1} \cdot b_3 + \cdots + A_{2,d-2} \cdot b_d = 0, \\ \qquad \vdots \\ \partial_x(b_3) + \partial_y(b_4) + A_{d-2,1} \cdot b_3 + \cdots + A_{d-2,d-2} \cdot b_d = 0, \\ \partial_y(b_3) + A_{d-1,1} \cdot b_3 + \cdots + A_{d-1,d-2} \cdot b_d = 0. \end{cases}$$

Concrètement, un système de Cramer où l'on reconnaît le déterminant de Sylvester donnant le p-résultant de F permet de déterminer les coefficients A_{ij} dans $\mathcal{O}[1/R]$, et un calcul montre qu'ils sont en fait à pôles sur Δ. Ceci conduit d'ailleurs à une étude des tissus singuliers qui fait l'objet de travaux en cours.

Par la nature de ses symboles, les solutions analytiques de $\mathcal{M}(d)$ forment un *système local* dont nous sommes amenés à chercher le rang. Pour cela est construit à partir de $\mathcal{M}(d)$ grâce à la théorie de Cartan–Spencer un *fibré vectoriel complexe E de rang π_d sur* $(\mathbb{C}^2, 0)$, inclus dans le fibré des jets $J_{d-2}(\mathcal{O}^{d-2})$ et une *connexion* $\nabla : E \to \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} E$, *non nécessairement intégrable, dont les sections horizontales s'identifient à* $\mathfrak{a}_F$. De plus, il existe une *base adaptée* de (E, ∇) telle que sa courbure K ait pour matrice

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{\pi_d} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Le théorème de Cauchy–Kowalevski assure que les tissus maximaux sont exactement ceux pour lesquels la connexion associée est intégrable. Dans le cas d'un 3-tissu, la courbure obtenue est une 2-forme qui est la *courbure de Blaschke* classique du tissu. Par construction, la connexion (E, ∇) dépend de la présentation F de $\mathcal{W}(d)$. Cependant, elle permet de déterminer d'autres invariants que le rang, comme nous allons le voir.

Dans toute la suite, on considère un d-tissu du plan non singulier $\mathcal{W}(d)$ présenté par une équation différentielle F de la forme (1), et dont on note la connexion associée (E, ∇) et la courbure K.

2. Trace de la matrice de courbure et autres invariants

Soit $P_{\mathcal{W}(d)}$ l'unique polynôme à coefficients dans $\mathcal{O}$ de degré inférieur ou égal à $d-1$ vérifiant pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ l'équation $P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, p_i) = \partial_x(p_i) + p_i \partial_y(p_i)$. Les feuilles du tissu sont solutions de l'équation différentielle $y'' = P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, y')$ et $\mathcal{W}(d)$ est linéaire si et seulement si $P_{\mathcal{W}(d)}$ est nul. Dans [3] est établi que $\mathcal{W}(d)$ est linéarisable pour $d \geqslant 4$ si et seulement si $\deg(P_{\mathcal{W}(d)}) \leqslant 3$ et ses coefficients vérifient un système différentiel non linéaire $L_1 = 0$ et $L_2 = 0$. Essentiellement par le calcul, on montre la proposition suivante :

Proposition 2.1.

(a) *Le polynôme $P_{\mathcal{W}(d)}$ est un invariant du tissu $\mathcal{W}(d)$* ;
(b) *Les éléments A_{ij} du système $\mathcal{M}(d)$ s'expriment explicitement à partir des coefficients de $P_{\mathcal{W}(d)}$, et de ceux d'une forme de Pfaff dont la différentielle est un invariant du tissu $\mathcal{W}(d)$.*

Par conséquent, on précise les résultats obtenus dans [4] concernant les *invariants* engendrés par le système $\mathcal{M}(d)$, et un calcul montre pour au moins $d = 4$ et 5, que les coefficients de la matrice de courbure sont des invariants du tissu.

L'écriture des coefficients A_{ij} en fonction notamment des coefficients du polynôme $P_{\mathcal{W}(d)}$, permet aussi de retrouver, à la suite de Nakai (cf. [6]), pour un 4-tissu $\mathcal{W}(4)$ du plan non singulier, l'*équivalence* des trois propriétés suivantes :

(i) *Pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, les* 1*-formes* $\mathrm{d}F_i$ *définissant* $\mathcal{W}(4)$ *à un inversible de* $\mathcal{O}$ *près, vérifient la relation* $\mathrm{d}F_i = s_i\,\mathrm{d}F_1 + t_i\,\mathrm{d}F_4$ *avec s_i et t_i distincts dans* $\mathbb{P}^1$;
(ii) *Les courbures de Blaschke des* 3*-tissus extraits de* $\mathcal{W}(4)$ *sont égales* ;
(iii) *Le birapport des quatre pentes p_i de* $\mathcal{W}(4)$ *est constant.*

Par ailleurs, on montre que de tels tissus ne sont *pas* linéarisables, sauf s'ils sont hexagonaux (i.e. les quatre 3-tissus extraits sont de rang 1).

• *Linéarisation des* 4*-tissus*. L'introduction du polynôme $P_{\mathcal{W}(d)}$ permet aussi dans le cas où $d = 4$ au moins, d'identifier plus précisément la courbure K, en montrant la proposition de linéarisation suivante :

Proposition 2.2. *Avec les notations précédentes et pour un* 4*-tissu* $\mathcal{W}(4)$*, il existe une base adaptée de* (E,∇) *telle que* $k_2=\partial_x(k_1)+L_1$; $k_3=\partial_y(k_1)+L_2$.

Par conséquent, et grâce aux propriétés générales de $P_{\mathcal{W}(d)}$ rappelées ci-dessus, $\mathcal{W}(4)$ *est linéarisable si et seulement si, dans cette base,* $k_2=\partial_x(k_1)$ et $k_3=\partial_y(k_1)$. En fait, on montre dans le cas général que la matrice de courbure d'un tissu linéaire ne dépend que de k_1 et de ses dérivées partielles. Ainsi, on redémontre avec des méthodes propres aux systèmes différentiels, le théorème de Poincaré suivant : *Un* 4*-tissu du plan non singulier de rang maximal est linéarisable.*

• *Tissus rectifiés*. Traditionnellement, on peut préférer à la présentation implicite d'un tissu, la donnée d'un *tissu rectifié*, défini par les courbes de niveaux $(x,y,F_3(x,y),\ldots,F_d(x,y))$. Dans le cas non singulier, un changement de variables permet de se ramener à ce cas et les méthodes précédentes s'y appliquent et donnent le résultat suivant :

Proposition 2.3. *Pour un* 4*-tissu rectifié* $\mathcal{W}(4)$*, il existe une base adaptée de* (E,∇) *telle que les coefficients de la matrice de courbure soient* : $k_1=K_x+K_y+K_3+K_4$, $k_2=\partial_x(K_y)+v_3K_y$, $k_3=\partial_y(K_x)-v_2K_x$ *avec* $P_{\mathcal{W}(4)}=-v_1p^3-v_2p^2-v_3p-v_4$ *et où* K_x, K_y, K_3 *et* K_4 *désignent les courbures de Blaschke des* 3*-tissus extraits de* $\mathcal{W}(4)$ *indexées par la feuille retirée.*

En général, pour $d\geqslant 5$, cette simplicité n'est plus et les deux approches présentées se valent alors en complexité. On remarque dans la proposition précédente que la trace de K est la somme des courbures de Blaschke des 3-tissus extraits, ce que l'on va généraliser.

• *Sur la trace de la courbure de* (E,∇). En germe dans [4], et de façon analogue à la théorie de Chern–Weil, la trace $\mathrm{tr}(K)$ de la courbure K se révèle d'une importance propre pour la géométrie du tissu $\mathcal{W}(d)$ et non pas seulement du fibré E. Comme nous l'avons montré pour le moment par un calcul pour au moins $d=4$, 5 et 6, cette trace $\mathrm{tr}(K)$ est un invariant de $\mathcal{W}(d)$ qu'on appellera la *courbure de Blaschke–Chern* de $\mathcal{W}(d)$, qui de plus, rend compte des 3-tissus extraits. En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 2.4 (Formule de la trace). *Soit* $\mathcal{W}(d)$ *un* d*-tissu non singulier du plan implicitement présenté par* F*, dont on note* (E,∇) *la connexion associée, et* K *sa courbure. On a alors l'égalité suivante* :

$$\mathrm{tr}(K)=\sum_{k=1}^{\binom{d}{3}}\mathrm{d}\gamma_k,$$

pour au moins $d=4,5$ *et* 6*, où les* $\mathrm{d}\gamma_k$ *désignent les courbures de Blaschke des* 3*-tissus extraits de* $\mathcal{W}(d)$*.*

De façon équivalente, le fibré déterminant $(\det(E),\det(\nabla))$ associé à (E,∇) est donc isomorphe au fibré tensoriel des fibrés en droites $(\otimes L_i,\otimes\nabla_i)$ associés aux 3-tissus extraits.

Notons ici qu'en 1938, Pantazi [7] a annoncé des résultats concernant le rang des tissus, mais sans preuve véritable ni formulation explicite. Par la suite, Mihaileanu [5] tient comme valide pour $d\geqslant 3$ une formule du type de celle énoncée dans le Théorème 2.4, sur la base des travaux de Pantazi. Ignorés jusqu'ici, et en tout cas par l'auteur lors de la soumission initiale de ce projet de note en octobre 2004, ces méthodes ont été largement réactualisées par Pirio dans [8].

3. Détermination du rang des tissus du plan : cas général

L'existence de bases adaptées de (E,∇) permet de donner un moyen effectif de détermination du rang.

On note γ la matrice de connexion du tissu dans une base adaptée donnée et on considère la première ligne de la matrice de courbure dans cette base notée $k=(k_1,k_2,\ldots,k_{\pi_d})$. Les sections horizontales de la connexion ∇ notées $f={}^t(f_1,f_2,\ldots,f_{\pi_d})\in E^{\nabla}:=\mathrm{Ker}\,\nabla$ qui s'identifient aux relations abéliennes du tissu, *via* l'espace $\mathfrak{a}_F$, vérifient le système différentiel $\mathrm{d}f+\gamma f=0$. La condition d'intégrabilité de ce système est donnée, grâce à la base adaptée, par la *seule* relation

$$k \cdot f = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_{\pi_d} f_{\pi_d} = 0. \tag{2}$$

Ces considérations vont nous permettre de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Détermination du rang d'un tissu du plan). *Soit $\mathcal{W}(d)$ un d-tissu du plan non singulier présenté par F, dont on note (E, ∇) la connexion associée, munie d'une base adaptée. Il existe un fibré vectoriel $\overline{K}$ de rang* $\operatorname{rg}\mathcal{W}(d)$, *noyau d'un endomorphisme de $\mathcal{O}^{\pi_d}$*, explicite, *tel que l'on ait $\overline{K} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} E^{\nabla}$. En particulier, si l'on note $(k_{m\ell})$ la matrice de cet endomorphisme, le rang du tissu est explicitement donné par l'égalité suivante* : $\operatorname{rg}\mathcal{W}(d) = \operatorname{corang}(k_{m\ell})$.

Démonstration. Elle utilise le lemme de Nakayama et fondamentalement que E^{∇} est un système local. On considère les π_d équations obtenues de la dérivation jusqu'à l'ordre $d-3$ de l'Éq. (2) où l'on pose $\mathrm{d}f = -\gamma f$. On obtient ainsi une matrice carrée $(k_{m\ell})$ d'ordre π_d à coefficients dans $\mathcal{O}$, dont la première ligne est k. Le $\mathcal{O}$-module $\overline{K} := \operatorname{Ker}(k_{m\ell})$ est de type fini et par construction, l'inclusion $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} E^{\nabla} \subseteq \overline{K}$ est vérifiée. Pour montrer la relation annoncée, il suffit de montrer que l'on a l'égalité $\overline{K} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} E^{\nabla} + \mathfrak{m} \cdot \overline{K}$ en notant $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. On considère des générateurs $(g_1, \ldots, g_r)$ de $\overline{K}$ tels que les $g_i(0)$ soient $\mathbb{C}$-linéairement indépendants. Soit $g \in \overline{K}$; le système précédent de générateurs permet de montrer que si $g(0) = 0$, alors $g \in \mathfrak{m}\overline{K}$. A l'aide du théorème de Cauchy et grâce à la construction particulière de la matrice $(k_{m\ell})$ issue de la dérivation de la condition d'intégrabilité (2), on montre que si $g(0) \neq 0$, il existe un germe de fonction analytique f dans E^{∇} telle que $f(0) = g(0)$. Ainsi, $g - f \in \overline{K}$ et vérifie $(g - f)(0) = 0$. Comme précédemment, le système de générateurs permet alors de montrer que $g - f \in \mathfrak{m}\overline{K}$, ce qui prouve l'égalité voulue entre $\mathcal{O}$-modules et donne une méthode explicite d'évaluation du rang. □

De façon effective, et à titre d'exemple, *un d-tissu non singulier $\mathcal{W}(d)$ du plan est de rang au moins* 1 *si et seulement si le déterminant de $(k_{m\ell})$ est nul*. Ce déterminant est certainement un invariant du tissu $\mathcal{W}(d)$, comme cela a été montré dans le cas où $d = 4$.

En écrivant explicitement la matrice $(k_{m\ell})$, les résultats précédents permettent de montrer que *le rang d'un* 4*-tissu $\mathcal{W}(4)$ dont les courbures de Blaschke des* 3*-tissus extraits sont égales et non nulles vérifie l'inégalité* $\operatorname{rg}\mathcal{W}(4) \leqslant 1$. On montre également qu'un 4-tissu de courbure de Blaschke–Chern nulle est de rang distinct de 2. Ceci nous permet par exemple de retrouver le résultat suivant :

Proposition 3.2 (G. Bol, cas $d = 4$). *Un* 4*-tissu hexagonal $\mathcal{H}(4)$ du plan est de rang maximal.*

Démonstration. Un tissu hexagonal $\mathcal{H}(4)$ admet quatre relations abéliennes à trois termes, dont deux sont nécessairement linéairement indépendantes, ainsi $\operatorname{rg}\mathcal{H}(4) \geqslant 2$. Or, sa courbure de Blaschke–Chern est nulle en vertu de la formule de la trace, donc $\mathcal{H}(4)$ ne peut être de rang 2, d'après la remarque précédente et par conséquent $\mathcal{H}(4)$ est de rang maximal. □

Références

[1] W. Blaschke, G. Bol, Geometrie der Gewebe, Springer-Verlag, Berlin, 1938.
[2] S.S. Chern, P.A. Griffiths, Abel's theorem and webs, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 80 (1978) 13–110.
[3] A. Hénaut, Sur la linéarisation des tissus de $\mathbb{C}^2$, Topology 32 (1993) 531–542.
[4] A. Hénaut, On planar web geometry through abelian relations and connections, Ann. of Math. 159 (2004) 425–445.
[5] N. Mihaileanu, Sur les tissus plans de première espèce, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 43 (1941) 23–26.
[6] I. Nakai, Curvature of curvilinear 4-webs and pencils of one forms: Variation on a theorem of Poincaré, Mayrhofer and Reidemeister, Comment. Math. Helv. 73 (1998) 177–205.
[7] A. Pantazi, Sur la détermination du rang d'un tissu plan, C. R. Acad. Sci. Roumanie 2 (1938) 108–111.
[8] L. Pirio, Équations fonctionnelles abéliennes et géométrie des tissus, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, décembre 2004.