Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 217–222

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov pour les actions moyennables

Driss El Morsli

Institut de mathématiques de Luminy, 163, avenue de Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 9, France

Reçu le 13 avril 2005 ; accepté après révision le 7 juin 2005

Disponible sur Internet le 15 août 2005

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Soit une suite exacte équivariante de G-algèbres séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, admettant un relèvement complètement positif gradué (non nécessairement équivariant) de norme 1. Nous utilisons la notation (X, G) pour un groupe de transformation topologique moyennable au sens d'Anantharaman-Delaroche. Nous établissons un isomorphisme concernant le bifoncteur equivariant de Kasparov $\mathcal{R}KK_G(X; -, -)$. Cet isomorphisme en K-théorie, permet d'étendre la semi-exactitude du cas des algèbres propres (cette dernière est analogue à celle obtenue par Skandalis dans le cas non-equivariant) à celui des actions moyennables. En particulier, nous nous plaçons dans un cas important, celui des déplacements hyperboliques de la géométrie de Poincaré–Lobatschevsky sur le disque unité. ***Pour citer cet article : D. El Morsli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Half-exactness of the Kasparov equivariant bifunctor for amenable actions. Consider an equivariant extension of graded separable G-algebras which admits a completely linear positive, grading preserving cross section (not necessary equivariant) of norm 1. We denote (X, G) an amenable topological transformation group in the sense of Anantharaman-Delaroche. We establish an isomorphism concerning the Kasparov equivariant bifunctor $\mathcal{R}KK_G(X; -, -)$. This isomorphism in K-theory, allows one to extend the half-exactness from the case of the proper algebras (which is analogue to the one obtained by Skandalis in the non-equivariant case) to the case of amenable actions. In particular, we will place ourselves in a significant case, that of hyperbolic displacements of the Poincaré–Lobatschevsky geometry on the unit disc. ***To cite this article: D. El Morsli, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Adresse e-mail : elmorsli@iml.univ-mrs.fr (D. El Morsli).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.07.002

Abridged English version

Let G be a locally compact topological group and X a locally compact topological space. We shall denote by $C(X)$ the algebra of continuous functions on X vanishing at infinity.

In this Note, we use (X,G) to denote an amenable transformation group of the sense of Anantharaman-Delaroche, i.e., there is a net $(m_i)_{i\in I}$ of continuous maps $x \mapsto m_i^x$ from X into the space of probability measures provided with weak topology such that $\lim_i \|s\cdot m_i^x - m_i^{s\cdot x}\|_1 = 0$ uniformly on every compact of $X\times G$ [1, Definition 2.1]. We call G-$C(X)$-algebra any G-algebra A provided with a non-degenerated representation of $C(X)$ on the center $Z(M(A))$ of the algebra of the multipliers of A, such that $g(fa)=g(f)g(a)$, for all $f\in C(X)$, $g\in G$ and $a\in A$ (cf. [4,7]). A $C(X)$-algebra A is then provided with a structure of Banach $C(X)$-module such that $C(X)A=A$. A G-algebra is proper if it is a G-$C(Y)$-algebra for some proper G-space Y. In [6], Kasparov associates to any pair (A,B) of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graded G-algebras, an Abelian group noted $KK_G(A,B)$. It is shown that an extension of G-algebras $0\to I\xrightarrow{i} A\xrightarrow{p} A/I\to 0$, with a completely positive and equivariant cross-section $s: A/I\to A$, gives rise to six-term exact sequences:

$$\text{(a)}\quad\begin{array}{ccccc} KK_G(A/I,B) & \xrightarrow{p^*} & KK_G(A,B) & \xrightarrow{i^*} & KK_G(I,B)\\ \uparrow\delta & & & & \downarrow\delta\\ KK_G^1(I,B) & \xleftarrow{i^*} & KK_G^1(A,B) & \xleftarrow{p^*} & KK_G^1(A/I,B)\end{array}$$

$$\text{(b)}\quad\begin{array}{ccccc} KK_G(B,I) & \xrightarrow{i_*} & KK_G(B,A) & \xrightarrow{p_*} & KK_G(B,A/I)\\ \uparrow\delta' & & & & \downarrow\delta'\\ KK_G^1(B,A/I) & \xleftarrow{q_*} & KK_G^1(B,A) & \xleftarrow{i_*} & KK_G^1(B,I)\end{array}$$

for any algebra B. This important property of equivariant KK-theory was established in [2]. Already in the non-equivariant case, it is, in general, necessary to have the completely positive cross-section (see [10]), but it was a question if it was necessary that the completely positive cross-section has to be equivariant. This question has been addressed in [9] and partial results – all indicating that equivariance may not be necessary – have been obtained in [3,2,9]. The purpose of this note is to prove that equivariance of s is in fact not necessary in the case of amenable actions. Such exact sequences, if they exist, can be used to build elements of Kasparov equivariant theory. Kasparov defines on the category of G-$C(X)$-algebras, a bifunctor $\mathcal{R}KK_G(X;-,-)$ (cf. [6]). When the space X is trivial, we find the bifunctor $KK_G(-,-)$. When we consider the G-$C(X)$-algebras $A=A_1\otimes C(X)$ and $B=B_1\otimes C(X)$, we denote $\mathcal{R}KK_G(X;A,B)$ by $RKK_G(X;A_1,B_1)$. In [8], it is shown that, if $A_1\otimes C(X)$ is proper and nuclear, the exact sequence (b) for the group $RKK_G(X;A_1,B_1)$.

For two G-algebras A and B, and $(\mathcal{E},\pi)$ a Hilbert equivariant (A,B)-bimodule, we note $(\mathcal{E}_A,\pi_A)$ the Hilbert equivariant (A,B)-bimodule $(A\mathbin{\widehat{\otimes}}_A\mathcal{E}, 1\otimes\pi)$. Suppose that A is proper. Let us take again the construction of [8, Proof of Proposition 5.7]. We see then that $\mathcal{E}_A$ is a direct summand of $\mathcal{E}_A\otimes L^2(G)$. Thus, if B is proper, B is a direct summand of $B\otimes L^2(G)$. Then $\mathcal{E}_A=\mathcal{E}_A\mathbin{\widehat{\otimes}}_B B$ is a direct summand of $\mathcal{E}_A\otimes L^2(G)$. We shall use this result by adapting the method of Skandalis in [10], to show the following:

Proposition 0.1. *Let G be a second countable locally compact group. Let A and B be separable graded G-algebras. Let I be a graded ideal of A and $0\to I\xrightarrow{i} A\xrightarrow{p} A/I\to 0$ a short exact sequence. Assume that there is a completely positive cross-section $s: A/I\to A$ (not necessary equivariant) of norm* 1. *If A or B is proper, then the sequences* (a) *and* (b) *are exact.*

Tu shows in [11] that, if we have an amenable transformation group (X,G), then there exists a metrically proper action of G by affine isometries on the constant field of Hilbert spaces with fiber $H_x=H_0=L^2(G)\otimes l^2(\mathbb{N})$. Higson and Kasparov have defined in [4, Section 4] a separable nuclear graded algebra noted $\mathcal{A}(H_x)$. We note

$\mathcal{A}_X(H)$ the field of C^*-algebras $(\mathcal{A}(H_x), X)$. Since all the fibers are isomorphic with $\mathcal{A}(H_0)$, and by using the Dauns–Haufmann's theorem, we have $\mathcal{A}_X(H) = C(X)\widehat{\otimes}\mathcal{A}(H_0)$, more than that, it is proper, separable, nuclear and graded algebra. In [11], Tu constructed 'dual Dirac and Dirac elements' by exhibiting the elements of $\beta_X \in \mathcal{R}KK_G(X; C(X), \mathcal{A}_X(H))$ and $\alpha_X \in \mathcal{R}KK_G(X; \mathcal{A}_X(H), C(X))$, which correspond to the construction in E-theory of [4], he proved also that the product of Kasparov $\beta_X \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}_X(H)} \alpha_X$ is equal to $1_{C(X)}$ in $\mathcal{R}KK_G(X; C(X), C(X))$. Applying the natural homomorphism $\sigma_{X,A}$ given in [7, Lemme 2.19], we find two elements $\sigma_{X,A}(\alpha_X)$ in $\mathcal{R}KK_G(X; \mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)} A, A)$ and $\sigma_{X,A}(\beta_X)$ in $\mathcal{R}KK_G(X; A, \mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)} A)$. Finally the isomorphism

(c) $\mathcal{R}KK_G(X; A, -) \simeq \mathcal{R}KK_G\big(X; A\widehat{\otimes}_{C(X)}\mathcal{A}_X(H), -\big)$

exists because $\gamma = \sigma_{X,A}(\beta_X)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}_X(H)\widehat{\otimes}_{C(X)}A}\,\sigma_{X,A}(\alpha_X) = 1_A$. This isomorphism and the existence of exact sequences for the proper algebras allow to extend the hexagonal exact sequences to amenable actions.

Theorem 0.2. *Let (X, G) be an amenable transformation group. Let $0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \to 0$ be an extension of graded separable G-algebras. Assume that p admits a completely positive, grading preserving, cross-section $s : A/I \to A$ (not necessary equivariant) of norm* 1*. Then, if A (resp. B) is a $C(X)$-algebra then the sequence* (a) *(resp.* (b)*) is exact.*

1. Introduction

Soient G un groupe topologique localement compact, X un espace topologique localement compact séparé. On note $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X nulles à l'infini.

Dans la présente Note, nous utilisons (X, G) pour designer un groupe de transformation topologique moyennable au sens d'Anantharman-Delaroche (cf. [1, Définition 2.1]). Rappelons cette définition : étant donné un groupe de transformation (X, G), on dit que (X, G) est *moyennable en mesure* s'il existe une suite généralisée $(m_i)_{i\in I}$ d'applications continues $x \mapsto m_i^x$ de X dans l'espace de mesures de probabilité sur G muni de la topologie faible, telles que $\lim_i \|s\cdot m_i^x - m_i^{s\cdot x}\|_1 = 0$ uniformément sur tout compact de $X \times G$. On appelle G-algèbre une C^*-algèbre A sur laquelle G agit continûment (en norme) par automorphismes. On rappelle les définitions suivantes (cf. [4,7]) : on appelle *G-$C(X)$-algèbre* toute G-algèbre A munie d'une représentation non dégénérée de $C(X)$ sur le centre $Z(M(A))$ de l'algèbre des multiplicateurs de A, tel que $g(fa) = g(f)g(a)$, pour tout $f \in C(X)$, $g \in G$ et $a \in A$. Une $C(X)$-algèbre A est donc munie d'une structure de $C(X)$-module de Banach telle que l'on ait, on outre, $C(X)A = A$. Une G-algèbre A pour laquelle il existe un G-espace propre Y tel que A est une G-$C(Y)$-algèbre est dite *propre*. Remarquons qu'il existe une certaine liberté dans le choix de l'espace Y.

Kasparov associe à toute paire (A, B) de G-algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, un groupe abélien noté $KK_G(A, B)$, il a aussi défini sur la catégorie des G-$C(X)$-algèbres, un bifoncteur $\mathcal{R}KK_G(X; -, -)$ (cf. [6]). Lorsque l'espace X est trivial, on retrouve le bifoncteur $KK_G(-, -)$. Si on considère les G-$C(X)$-algèbres $A = A_1 \otimes C(X)$ et $B = B_1 \otimes C(X)$, on désigne $\mathcal{R}KK_G(X; A, B)$ par $RKK_G(X; A_1, B_1)$. On propose d'étudier le comportement du bifoncteur ainsi défini vis-à-vis des suites exactes.

Soit $(E) : 0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \to 0$ une suite exacte équivariante de G-algèbres telle que p admet un relèvement complètement positif (non nécessairement équivariant) de norme 1. On va établir l'exactitude des suites exactes hexagonales (a) et (b) ; données ci-dessus, pour les actions moyennables en se basant sur le même résultat pour les actions propres. On note par (a′) (resp. (b′)) la première ligne de la suite hexagonale (a) (resp. (b)). De telles suites exactes si elles existent, peuvent être utilisées pour construire des éléments de la théorie de Kasparov G-équivariante. Le comportement de KK_G vis-à-vis des suites exactes a fait l'objet de nombreuses études. Dans [10] Skandalis montre que les foncteurs $KK(B, -)$ et $KK(-, B)$ restreints aux algèbres $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées tel que la suite (E) admet un relèvement complètement positif de l'application p, sont semi-exacts. Dans [2], Baaj et Skandalis montrent que si G est moyennable discret et si A/I est nucléaire, on a les suites exactes hexagonales (a) et (b). Les mêmes résultats sont obtenus par Maghfoul (cf. [9]) pour les groupes localement compacts fortement moyennables en K-théorie. Dans [8], on a, si $A_1 \otimes C(X)$ est nucléaire propre, la suite (b) est exacte pour le groupe $RKK_G(X; A_1, B_1)$. On s'inspire, dans notre situation, d'idées de [10,8,9]. On établit les suites exactes (a) et (b) pour les algèbres propres. On se sert, des résultats de [4,11] pour construire une algèbre non-commutative nucléaire séparable propre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée, que l'on notera $\mathcal{A}_X(H)$, et on montre l'isomorphisme (c) ci-dessus. Cet isomorphisme en K-théorie et l'existence des suites exactes pour les algèbres propres permettent alors d'étendre les suites exactes hexagonales (a) et (b) aux actions moyennables.

2. Suites exactes en *K*-théorie bivariante pour les algèbres propres

Soient A, B deux G-algèbres séparable $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, et $(\mathcal{E}, \pi)$ un (A, B)-bimodule Hilbertien équivariant. On note $(\mathcal{E}_A, \pi_A)$ le (A, B)-bimodule Hilbertien équivariant $(A \mathbin{\widehat{\otimes}}_A \mathcal{E}, 1 \otimes \pi)$. Supposons que A est propre, reprenons la construction de [8, Démonstration de la Proposition 5.7]. Dans ce cas, G agit proprement sur un espace localement compact Y. Il existe alors une fonction de coupure $\mathcal{C}: Y \to \mathbb{R}^+$ continue. Puisque G agit par translations à gauche sur G et diagonalement sur $C(Y) \otimes L^2(G)$, on associe à $\mathcal{C}$ une isométrie G-invariante $V_0 : C(Y) \to C(Y) \otimes L^2(G)$ définie pour tous $\xi \in C(Y)$, $y \in Y$, $g \in G$ par la formule $(V_0(\xi))(y, g) = \xi(y)(\mathcal{C}(g^{-1}y))^{1/2}$, on écrit $A = C(Y) \otimes_{C(Y)} A$ et $A \otimes L^2(G) = (C(Y) \otimes L^2(G)) \otimes_{C(Y)} A$. L'application $V = (V_0 \otimes_{C(Y)} 1) \otimes 1 : \mathcal{E}_A \to \mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$ définit un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_A, \mathcal{E}_A \otimes L^2(G))$ et est de plus une isométrie G-invariante. Comme l'action de $C(Y)$ est centrale, V entrelace les actions de A. Ainsi $\mathcal{E}_A$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$. Si B est propre alors B est un facteur direct de $B \otimes L^2(G)$. Donc $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_A \mathbin{\widehat{\otimes}}_B B$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Si A ou B est propre, alors $\mathcal{E}_A$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$.*

Proposition 2.2. *Soient G un groupe topologique localement compact, A et B deux G-algèbres séparables $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, I un idéal bilatère fermé $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué de A, et $0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \to 0$ une suite exacte équivariante de G-algèbres telle que p admet un relèvement complètement positif s (non nécessairement équivariant) de norme 1. Si A ou B est propre, alors les suites* (a′) *et* (b′) *sont exactes.*

Démonstration. Nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soient G_1 et F_1 dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$ tels que $(\mathcal{E}_A, G_1) \in E_G(A, B)$, $(\mathcal{E}_A, F_1) \in D_G(I, B)$ et $I \cdot (F_1 - G_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_A)$. Alors la classe de $(\mathcal{E}_A, G_1)$ dans $KK_G(A, B)$ est dans* $\operatorname{Im} p^*$.

Démonstration. D'après le théorème de Stinespring généralisé par Kasparov (cf. [6]), il existe un A-module Hilbertien $\mathcal{E}_0$ et un $*$-homomorphisme non équivariant $\pi : A/I \to \mathcal{L}(A \oplus \mathcal{E}_0)$ tel que $s(a) = Q\pi(a)Q$ pour tout a dans A, où $Q : A \oplus \mathcal{E}_0 \to A$ est la projection naturelle sur le premier facteur direct A. On remplace $\mathcal{E}_0$ par le I-module Hilbertien engendré par $\{(1 - Q)\pi(a)\xi \mid a \in A/I,\ \xi \in\ A\}$, que l'on note $\mathcal{E}_0'$. Montrons qu'il existe $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{F}) \in E_G(A/I, B)$ tel que $[p^*(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{F})] = [(\mathcal{E}_A, G_1)]$ dans $KK_G(A, B)$. En fait, posons $\widetilde{\mathcal{E}} := ((A \oplus \mathcal{E}_0') \otimes L^2(G)) \mathbin{\widehat{\otimes}}_A \mathcal{E}_A = (\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)) \oplus ((\mathcal{E}_0' \mathbin{\widehat{\otimes}}_I \mathcal{E}_A) \otimes L^2(G))$. Puisque l'algèbre A ou B est propre, $\mathcal{E}_A$ est un facteur direct de $\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$ (cf. Proposition 2.1). Soit $\mathcal{E}'$ l'orthocomplément de $\mathcal{E}_A$ dans $\mathcal{E}_A \otimes L^2(G)$. On définit $\widetilde{F}$ sur $\widetilde{\mathcal{E}}$ comme somme directe des trois opérateurs suivants : G_1 sur $\mathcal{E}_A$, la compression de $F_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} 1$ sur $\mathcal{E}'$, et $(1 \mathbin{\widehat{\otimes}} F_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} 1$ sur $(\mathcal{E}_0' \mathbin{\widehat{\otimes}}_I \mathcal{E}) \otimes L^2(G)$. Dans ce cas, $\widetilde{F}$ est une G_1-connexion pour $(A \oplus \mathcal{E}_0') \otimes L^2(G)$. Alors le couple $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{F})$ définit bien un élément de $E_G(A/I, B)$. Comme l'application $\sigma : A \to A[0, 1]$, définie par $\sigma(a)(t) = (1 - t)a + t(s \circ p)(a)$ pour tout $a \in A$, $t \in [0, 1]$, est complètement positive, $p \circ \sigma$ est un $*$-homomorphisme équivariant. Ainsi l'élément $\sigma^*(\mathcal{E}[0, 1], G \otimes 1, F \otimes 1)$ de $E_G(A, B[0, 1])$ définit bien une homotopie entre $(\mathcal{E}_A, G_1)$ et $p^*(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{F})$. $\square$

Revenons à la démonstration de la Proposition 2.2, nous établissons tout d'abord l'exactitude de (a$'$). Il est évident que $i^* \circ p^* = 0$. Montrons que $\operatorname{Ker} i^* \subset \operatorname{Im} p^*$. Soit $[(\mathcal{E}, F)] \in KK_G(A, B)$ tel que $i^*[(\mathcal{E}, F)] = [(0, 0)]$ dans $KK_G(I, B)$. Remarquons que si $(\mathcal{E}, F) \in E_G(A, B)$, alors il existe $F_A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_A)$ tel que $[(\mathcal{E}_A, F_A)] = [(\mathcal{E}, F)]$ dans $KK_G(A, B)$ (cf. [7, Lemme 2.8]). Reprenons les idées de la démonstration de [10, Proposition 2.1], qui s'adaptent à notre situation. Il existe $(\mathcal{E}', F') \in D_G(A, B)$ tel que $i^*(\mathcal{E}_A \oplus \mathcal{E}', F_A \oplus F')$ est opératoriellement homotope à un élément de $D_G(I, B)$. Comme la classe de $(\mathcal{E}_A, F_A)$ dans $KK_G(A, B)$ ne change pas quand on lui ajoute un élément $(\mathcal{E}', F')$ de $D_G(A, B)$, alors il existe un chemin $(F_t)_{t\in[0,1]}$, $F_t \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, tel que $F_A = F_0$, $(\mathcal{E}_A, F_t) \in E_G(I, B)$ et $(\mathcal{E}_A, F_1) \in D_G(I, B)$. Alors, il existe une homotopie opératorielle $(G_t)_{t\in[0,1]}$ tel que $(\mathcal{E}_A, G_t) \in E_G(A, B)$, $G_0 = F_A$ et $(G_t - F_t)\pi(a') \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_A)$, pour tout $a' \in I$. Ainsi $(\mathcal{E}_A, G_1)$ est opératoriellement homotope à $(\mathcal{E}_A, F_1) \in D_G(I, B)$ et $I(G_1 - F_1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_A)$. D'après le Lemme 2.3, il existe $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{F}) \in E_G(A/I, B)$ tel que $p^*[(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{F})] = [(\mathcal{E}_A, G_1)] = [(\mathcal{E}, F)]$.

Montrons que la suite (b$'$) est exacte. Grâce à [8, Lemme 5.8], si $p_*(\mathcal{E}, F)$ est opératoriellement homotope à un élément dégénéré, sa classe est une image par i_*. Si la classe de $p_*(\mathcal{E}, F)$ est égale à 0, il existe un élément $(\mathcal{E}', F')$ dans $E_G(B, A/I)$ tel que $p_*((\mathcal{E}, F)) \oplus (\mathcal{E}', F')$ soit opératoriellement homotope à un élément de $D_G(B, A/I)$. On considère le A-module Hilbertien équivariant $\bar{\mathcal{E}} = L^2(G) \otimes (A \oplus \mathcal{E}_0)$. Posons $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}'_B \mathbin{\widehat{\otimes}}_{A/I} \bar{\mathcal{E}}$ et $\widetilde{F} = F'_A \otimes 1$. Il est clair que $(\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{F})$ est un élément de $D_G(B, A)$. Comme A ou B est propre, $\mathcal{E}'_B$ est un facteur direct de $\widetilde{\mathcal{E}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_p A/I = ((\mathcal{E}'_B \otimes L^2(G)) \oplus E = \mathcal{E}'_B \oplus E'$ (cf. Proposition 2.1). Alors il est évident que $q_*((\mathcal{E}_A, F_A) \oplus (\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{F}))$ est opératoriellement homotope à un élément dégénéré. □

Dans [9], Maghfoul montre que, pour tout homomorphisme de G-algèbres $\varphi : A \to B$ et pour toute G-algèbre séparable D, les suites de Puppe (énoncées dans [2] et établies dans [3] pour le cas non équivariant)

$$\text{(i)}\quad KK_G(D, A]0,1[) \xrightarrow{\varphi_*} KK_G(D, B]0,1[) \xrightarrow{i_*} KK_G(D, C_\varphi) \xrightarrow{p_*} KK_G(D, A) \xrightarrow{\varphi_*} KK_G(D, B),$$
$$\text{(ii)}\quad KK_G(B, D) \xrightarrow{\varphi^*} KK_G(A, D) \xrightarrow{p^*} KK_G(C_\varphi, B) \xrightarrow{i^*} KK_G(B]0,1[, D) \xrightarrow{\varphi^*} KK_G(A]0,1[, D).$$

associées à φ ; où C_φ est le cône de l'homomorphisme φ, sont exactes. Soit $e : I \to C_\varphi$ l'inclusion naturelle et $[e]$ sa classe dans $KK_G(I, C_p)$. A l'aide des suites de Puppe, l'existence des suites exactes hexagonales (a) et (b) revient à montrer l'existence d'un inverse de $[e]$. Si l'application p admet un relèvement complètement positif, alors $[e]$ est inversible. Donc $\delta = j^* \circ e^{*-1}$ où j est l'inclusion naturelle de $A/I\,]0,1[$ dans C_p. On a :

Corollaire 2.4. *Sous les hypothèses de la Proposition* 2.2*, les suites hexagonales* (a) *et* (b) *sont exactes.*

On veut maintenant étendre ces résultats aux actions moyennables.

3. Semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov pour les actions moyennables

Tu montre dans [11] que pour tout groupe de transformation moyennable (X, G), il existe une action métriquement propre de G par isométries affines sur le champ trivial d'espaces de Hilbert $H_x = H_0 = L^2(G) \otimes l^2(\mathbb{N})$, i.e. $\lim_{g\to+\infty} \|g \cdot v\| = +\infty$, $\forall x \in X$, $\forall v \in H_x$.

Higson et Kasparov ont définit une algèbre non-commutative nucléaire séparable $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée notée $\mathcal{A}(H_x)$ (cf. [4, Proposition 4.2]). On note $\mathcal{A}_X(H)$ le champ de C^*-algèbres $(\mathcal{A}(H_x), X)$. Le fait que toutes les fibres sont isomorphes à $\mathcal{A}(H_0)$, grâce au théorème de Dauns–Haufmann on a $\mathcal{A}_X(H) = C(X) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{A}(H_0)$. De plus c'est une algèbre nucléaire séparable propre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée. Dans [11], Tu a effectué la construction 'dual Dirac–Dirac' en exhibant des éléments $\beta_X \in \mathcal{R}KK_G(X; C(X), \mathcal{A}_X(H))$ et $\alpha_X \in \mathcal{R}KK_G(X; \mathcal{A}_X(H), C(X))$ qui correspondent à la construction en E-théorie de [4], de plus il a montré que le produit de Kasparov $\beta_X \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{A}_X(H)} \alpha_X$ est égal à $1_{C(X)}$ dans $\mathcal{R}KK_G(X; C(X), C(X))$. En appliquant l'homomorphisme naturel $\sigma_{X,A}$ défini dans [7, Lemme 2.19], on trouve deux éléments : $\sigma_{X,A}(\alpha_X) \in \mathcal{R}KK_G(X; \mathcal{A}_X(H) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{C(X)} A, A)$ et $\sigma_{X,A}(\beta_X) \in$

$\mathcal{R}KK_G(X; A, \mathcal{A}_X(H) \widehat{\otimes}_{C(X)} A)$. Ainsi, l'isomorphisme (c) existe compte tenu que $\gamma = \sigma_{X,A}(\beta_X) \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}_X(H) \widehat{\otimes}_{C(X)} A}$ $\sigma_{X,A}(\alpha_X) = 1_A$. En fin, si A (resp. B) est munie d'une structure de $C(X)$ algèbre, on a $A \widehat{\otimes}_{C(X)} \mathcal{A}_X(H)$ (resp. $B \widehat{\otimes}_{C(X)} \mathcal{A}_X(H)$) est propre. Alors, grâce à l'isomorphisme (c) et au Corollaire 2.4, on obtient :

Théorème 3.1. *Soient (X, G) un groupe de transformation moyennable, A et B deux G-algèbres séparable $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées, I un idéal bilatère fermé $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué de A, et $0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A/I \to 0$ une suite exacte équivariante de G-algèbres tel que p admet un relèvement complètement positif* (*non nécessairement équivariant*) *de norme* 1. *Alors si A* (*resp.* B) *est munie d'une structure de $C(X)$-algèbre la suite* (a) (*resp.* (b)) *est exacte.*

4. Exemple d'application

Nous appliquons les résultats ainsi obtenus à l'exemple d'un groupe de transformation, celui des automorphismes analytiques du disque ouvert $B^2 : z \mapsto g \cdot z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, où a et b sont des paramètres complexes, et $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Cette action s'étend au disque fermé $\overline{B^2}$, avec deux orbites (l'intérieur du disque et le cercle frontière). L'action sur la boule ouverte B^2 est propre. Les stabilisateurs des points du cercle sont moyennables, le noyau de Poisson nous permet de construire une suite de mesures satisfaisant aux conditions de la moyennabilité topologique de l'action sur le cercle. D'autre part, on construit une suite des fonctions radiales, continues sur $\overline{B^2}$, presque invariantes sous l'action de G. La moyenne M_n sur le disque hyperbolique $\overline{B^2}$ est une combinaison convexe des moyennes à l'intérieur et au bord :

$$M_n(g, z) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\eta(n)|z|/(1-|z|)}\right) \frac{1}{c_n(\gamma_z)} \tilde{\mu}_n(g) P^{1/2n}(g \cdot 0, \gamma_z) + \mathrm{e}^{-\eta(n)|z|/(1-|z|)} \tilde{h}(g, z),$$

où $\eta(n)$ est une suite réelle convergente vers 0 et qui dépend du nombre de Lebesgue qui correspond au noyau de poisson $P^{1/2n}$, γ_z la projection centrale du point z sur le cercle S^1, $\tilde{\mu}_n$ le prolongement sur G de μ_n la fonction vérifiant la moyennabilité du stabilisateur des points du cercle, $c_n(\gamma_z) := \int_G \tilde{\mu}_n(g) P^{1/2n}(g, \gamma_z)\, \mathrm{d}g$ et $\tilde{h}$ le prolongement sur la boule fermée $\overline{B^2}$ d'une fonction satisfaisant les critères de la moyennabilité topologique du groupe de transformation (B^2, G). Enfin, grâce au Théorème 3.1, on retrouve ainsi le résultat de Julg et Kasparov [5, Lemme 1.4].

Remerciements

Je remercie vivement mes directeurs de Thèse, Gennadi Kasparov et Richard Zekri, pour m'avoir proposé cette recherche et apporté le soutien ainsi que les nombreuses idées nécessaires à sa réalisation.

Références

[1] C. Anantharaman-Delaroche, Amenability and exactness for dynamical systems and their C^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (10) (2002) 4153–4178 (electronic).
[2] S. Baaj, G. Skandalis, C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante, K-Theory 2 (6) (1989) 683–721.
[3] J. Cuntz, G. Skandalis, Mapping cones and exact sequences in *KK*-theory, J. Operator Theory 15 (1) (1986) 163–180.
[4] N. Higson, G.G. Kasparov, E-theory and *KK*-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space, Ivent. Math. 144 (1) (2001) 23–74.
[5] P. Julg, G.G. Kasparov, Operator K-theory for the group $SU(n, 1)$, J. Reine Angew. Math. 463 (1995) 99–152.
[6] G.G. Kasparov, Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu, J. Operator Theory 4 (1) (1980) 133–150.
[7] G.G. Kasparov, Equivariant *KK*-theory and the Novikov conjecture, Invent. Math. 91 (1) (1988) 147–201.
[8] G.G. Kasparov, G. Skandalis, Groups acting properly on "bolic" spaces and the Novikov conjecture, Ann. of Math. (2) 158 (1) (2003) 165–206.
[9] M. Maghfoul, Semi-exactitude du bifoncteur de Kasparov équivariant, K-Theory 16 (3) (1999) 245–276.
[10] G. Skandalis, Exact sequences for the Kasparov groups of graded algebras, Canad. J. Math. 37 (2) (1985) 193–216.
[11] J.-L. Tu, La conjecture de Baum–Connes pour les feuilletages moyennables, K-Theory 17 (3) (1999) 215–264.