Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 239–242
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Une méthode des sur et sous solutions améliorée

Philippe Delanoë [1]

Université de Nice-Sophia Antipolis, laboratoire J.-A. Dieudonné, parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

Reçu le 9 juin 2005 ; accepté le 25 juin 2005

Disponible sur Internet le 15 août 2005

Présenté par Thierry Aubin

Résumé

L'habituelle méthode des sur et sous solutions, pour résoudre une équation non-linéaire elliptique du second ordre, est itérative, ce qui complique, parfois jusqu'à la rendre impossible, l'indispensable estimation uniforme C^2, à cause de la présence simultanée de deux inconnues successives de l'itération dans la même équation. Nous présentons ici une méthode dépourvue de cet inconvénient, basée sur un argument de point fixe élémentaire. ***Pour citer cet article : P. Delanoë, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

An improved upper and lower solutions method. The usual upper and lower solutions method for solving a second order nonlinear elliptic equation is iterative, with the drawback of a tricky, if not sometimes impossible, derivation of the (quite essential) uniform C^2 estimate, due to the occurence in the same equation of two successive iteration unknowns. We present here a method free of such a drawback, based on an elementary fixed point argument. ***To cite this article: P. Delanoë, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

Instead of solving, say, the equation $\Delta u = f(x,u)$ on a compact riemannian manifold (M,g) in the presence of (strict) upper and lower solutions $u^- < u^+$ by means of the usual iterative scheme: $\Delta u_i + ku_i = f(x,u_{i-1}) + ku_{i-1}$ with a large enough constant $k > 0$ (a method going back at least to [3, pp. 369–371]), we propose to solve it by considering the solution $u = T(t,v)$ of the equation:

$$\Delta u + ku = t\big[f(x,v) + kv\big] + (1-t)\big[f(x,u^-) + ku^-\big],$$

Adresse e-mail : delphi@math.unice.fr (P. Delanoë).

[1] Supported by the CNRS.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.036

given $t \in [0,1]$ and v pinched between u^- and u^+. Indeed then, the maximum principle ensures that any fixed point $u = T(t,u)$ is *strictly* pinched between u^- and u^+ thus, with an appropriate setting, we may apply the Browder–Potter theorem [6]: it yields a pinched fixed point for $t = 1$ which solves our original equation.

Both methods equally extend to second order fully nonlinear elliptic equations [1,4,2] but the required further C^2 estimate, uniform (with respect to either $i \in \mathbb{N}$ or $t \in [0,1]$) is trickier to obtain with the former (e.g. [1,4]), because the two unknowns u_i and u_{i-1} occur together in the equation, than with the latter; recently, the former was obstructed while the latter worked out well [2].

1. Introduction

Pour résoudre l'équation $\Delta u = f(x,u)$ sur une variété riemannienne (M,g) compacte sans bord et avec f donnée de classe C^∞ (pour simplifier), en présence de solutions supérieure u^+ et inférieure u^-, avec $u^- \leqslant u^+$, on applique une méthode itérative (qui remonte au moins à [3, pp. 369–371]) en considérant la suite de fonctions $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = u^-$ et, pour $i \geqslant 1$, par :

$$\Delta u_i + ku_i = f(x, u_{i-1}) + ku_{i-1},$$

où k est défini comme le max de 0 et de $\sup_K \frac{\partial f}{\partial u}$ pris sur le compact :

$$K = \left\{(x,z) \in M \times \mathbb{R}, u^-(x) \leqslant z \leqslant u^+(x)\right\}.$$

Notons incidemment que l'hypothèse : $\exists x \in M, u^-(x) < u^+(x)$ garantit d'avoir $k > 0$ (petit exercice).

Le principe du maximum [5] permet d'encadrer la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entre u^- et u^+ (et de prouver sa croissance). Des arguments standards de compacité (cf. *infra*) permettent alors de conclure à sa convergence dans C^2 et sa limite u est solution C^∞ de l'équation $\Delta u = f(x,u)$ avec $u^- \leqslant u \leqslant u^+$.

Cette méthode est aussi utilisée pour résoudre des équations *totalement* non-linéaires de la forme $F[u] = f(x,u)$, avec un opérateur différentiel F elliptique du second ordre (ici tel que $\mathrm{d}F[u]$ ait un symbole défini négatif, comme celui de Δ) vérifiant $F[u + \text{constante}] \equiv F[u]$ (voir e.g. [1, pp. 155–156] ou [4, pp. 379–385]). Dans ce contexte, la présence de u_i et de u_{i-1} dans la même équation complique notoirement l'estimation uniforme C^2 de u_i, indispensable pour conclure ([1, pp. 155–156] ou [4, pp. 379–385]). Récemment, cet inconvénient a rendu la méthode inutilisable [2] compte-tenu d'un mode spécial d'estimation des dérivées secondes (voir [7]) dans le cas préalable $\frac{\partial f}{\partial u} \equiv 0$.

Le but de cette Note est de proposer une méthode alternative, plus simple d'utilisation en non-linéaire, assurant toujours l'encadrement entre u^- et u^+. Par clarté, nous la présentons ici dans le cas sans bord semi-linéaire indiqué plus haut ; chacun pourra l'adapter à ses besoins. Elle vient d'être utilisée avec succès (adaptée à une condition de Dirichlet) dans le cas cité où la méthode précédente butait [2].

2. La méthode

Reprenons les hypothèses du début de l'introduction. On a alors le résultat :

Lemme 2.1. *Considérons les propriétés suivantes* :

(i) u^- *n'est pas solution exacte de l'équation* $\Delta u = f(x,u)$;
(ii) u^+ *n'est pas solution exacte de l'équation* $\Delta u = f(x,u)$;
(iii) $\forall x \in M, u^-(x) < u^+(x)$.

Alors : (i) $\Rightarrow$ (iii) *et* (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Rappelons-en brièvement la preuve, standard. La fonction $w = u^+ - u^-$ vérifie : $\Delta w + a(x)w \geqslant 0$ sur M où $a(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_t)\,\mathrm{d}t$ avec $u_t = tu^+ + (1-t)u^-$. Comme w est non-négative, on a aussi bien : $\Delta w + \max[0, a(x)]w \geqslant 0$ et le principe du minimum [5] fournit l'alternative entre (iii) et $w \equiv 0$. Mais si u^- et u^+ coïncident, elles sont solutions de l'équation $\Delta u = f(x, u)$.

On suppose désormais remplies les conditions (i), (ii) du lemme. Pour toute fonction v sur M, on pose $\tilde{v} := v - u^-$ et soit V l'ouvert convexe (non vide d'après le Lemme 2.1) des fonctions continues $\tilde{v}$ vérifiant $0 < \tilde{v} < \tilde{u}^+$. Considérons l'application continue T donnée par :

$$(t, \tilde{v}) \in [0,1] \times (\overline{V} \cap C^2) \longrightarrow T(t, \tilde{v}) = \tilde{u} \in C^2$$

où $\tilde{u} := u - u^-$ avec u solution de l'équation :

$$\Delta u + ku = th(x, v) + (1-t)h(x, u^-), \tag{1}$$

en notant $h(x, z) := f(x, z) + kz$ pour abréger (on utilisera que h est non-décroissante en z). Soit $c > 0$ un réel tel que :

$$\forall (t, \tilde{u}) \in [0,1] \times (\overline{V} \cap C^2), \quad T(t, \tilde{u}) = \tilde{u} \Rightarrow |u|_2 < c$$

en notant $|.|_2$ une norme pour le Banach C^2. Une telle estimation peut, au cas particulier de notre équation, être établie de façon standard à partir du pincement $u^- \leqslant u \leqslant u^+$; en effet, celui-ci entraine une estimation du gradient de u d'après [1, p.108], puis on peut invoquer une estimation de Schauder dans $C^{2,\alpha}$ [5]. On restreint désormais le second facteur de l'application T au convexe fermé non vide $\overline{V}_c = \{\tilde{v} \in \overline{V} \cap C^2,\ |\tilde{v}|_2 \leqslant c\}$.

Théorème 2.2. *L'application continue $T : [0,1] \times \overline{V}_c \to C^2$ possède les propriétés suivantes* :

(i) *son image est relativement compacte* ;
(ii) *$T(0, \cdot)$ envoie $\partial \overline{V}_c$ dans $\overline{V}_c$* ;
(iii) *pour tout $t \in [0,1]$, l'application $T(t, \cdot)$ n'a pas de point fixe sur $\partial \overline{V}_c$.*

Moyennant ce résultat, sont remplies les conditions d'application du théorème de Browder–Potter [6] qui implique l'existence de $\tilde{u} \in \overline{V}_c$ point fixe de l'application $T(1, \cdot)$. La fonction $u = u^- + \tilde{u}$ vérifie donc $\Delta u = f(x, u)$ avec $u^- \leqslant u \leqslant u^+$ comme désiré.

3. Preuve du Théorème 2.2

La condition (i) découle ici d'estimations classiques dans $C^{2,\alpha}$ (cf. *supra*) et de la compacité de l'injection $C^{2,\alpha} \hookrightarrow C^2$ (Ascoli).

La condition (ii) a lieu par construction car : $T(0, \cdot) \equiv \tilde{u}_1$ où $u_1 = u^- + \tilde{u}_1$ désigne le second terme de la suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ du début de cette note.

Concentrons-nous sur la preuve de la condition (iii). Soit $(t, \tilde{u}) \in [0,1] \times \overline{V}_c$ tel que $T(t, \tilde{u}) = \tilde{u}$. Raisonnons par l'absurde ; si $\tilde{u} \in \partial \overline{V}_c$, alors il est vrai que :

$$|\tilde{u}|_2 \geqslant c \quad \text{ou :} \quad \exists x \in M, \quad \tilde{u}(x) \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{u}(x) \geqslant \tilde{u}^+(x).$$

Comme a priori $|\tilde{u}|_2 < c$ (voir plus haut), on a donc l'alternative :

$$\exists x \in M, \quad \tilde{u}(x) \leqslant 0 \tag{2}$$

ou

$$\exists x \in M, \quad \tilde{u}(x) \geqslant \tilde{u}^+(x). \tag{3}$$

Pour réfuter (2), on s'appuie sur l'inéquation :

$$\Delta(u-u^-)+k(u-u^-)\geqslant t\big[h(x,u)-h(x,u^-)\big]$$

vérifiée car u^- est solution inférieure. Elle implique $\Delta(u-u^-)+k(u-u^-)\geqslant 0$ par monotonie de h (cf. *supra*). Le principe du minimum [5], joint pour $t=0$ à l'hypothèse (i) du Lemme 2.1, garantit donc sur M l'inégalité stricte $u>u^-$, ou encore $\tilde{u}>0$ qui réfute bien (2).

Pour réfuter (3), on écrit pareillement l'inéquation :

$$\Delta(u-u^+)+k(u-u^+)\leqslant t\big[h(x,u)-h(x,u^+)\big]+(1-t)\big[h(x,u^-)-h(x,u^+)\big]$$

dont le membre de droite est non-positif ; le principe du maximum [5], joint pour $t=1$ à l'hypothèse (ii) du Lemme 2.1, implique $u<u^+$ sur M, ou encore $\tilde{u}<\tilde{u}^+$ comme désiré.

Remerciements

Je remercie Pierre Bayard de m'avoir fait part de ses difficultés pour [2], stimulant ainsi le présent travail.

Références

[1] Th. Aubin, Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge–Ampère Equations, Grundlehren Math. Wiss., vol. 252, Springer-Verlag, 1982.
[2] P. Bayard, Entire space-like hypersurfaces of prescribed scalar curvature in Minkowski space, Preprint Univ. Michoacan, April 2005, voir : http://arxiv.org/archive/math.DG/0504440, Calc. Var. PDE, à paraitre.
[3] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. 2, Wiley Interscience, 1962.
[4] Ph. Delanoë, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés riemanniennes compactes, I, J. Funct. Anal. 40 (1981) 358–386.
[5] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, second ed., Springer-Verlag, 1983.
[6] A.J.B. Potter, An elementary version of the Leray–Schauder theorem, J. London Math. Soc. 5 (2) (1972) 414–416.
[7] J.I.E. Urbas, The Dirichlet problem for the equation of prescribed scalar curvature in Minkowski space, Calc. Var. PDE 18 (2003) 307–316.