Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 265–268
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Physique mathématique/Probabilités

Champs aléatoires intermittents. Partie I : champs à accroissements symétriques

Jean Duchon, Raoul Robert

Institut Fourier, université Grenoble 1, UMR CNRS 5582, 100, rue des Mathématiques, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

Reçu le 2 juin 2005 ; accepté le 20 juin 2005

Disponible sur Internet le 15 août 2005

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Le but de cette Note est de construire une famille naturelle de processus et de champs aléatoires ayant un caractère multifractal. De tels objets jouent un rôle crucial dans la modélisation de la turbulence et des marchés financiers. Dans cette première partie nous présentons un modèle de champ à accroissements symétriques. ***Pour citer cet article : J. Duchon, R. Robert, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Intermittent random fields. Part I: fields with symmetric increments. The purpose of this Note is to construct a natural family of random processes and fields having a multifractal character. Such objects play a crucial rôle in modelling turbulence and financial markets. In the present first part we present a model of a field with symmetric increments. ***To cite this article: J. Duchon, R. Robert, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Observés de manière grossière, certains phénomènes aléatoires semblent invariants d'échelle. Il en est ainsi du champ de vitesse turbulent ou bien des processus à temps continu donnant l'évolution du cours d'un actif financier. Si on examine ces phénomènes de façon plus attentive, on s'aperçoit qu'ils présentent en fait une forme affaiblie d'invariance d'échelle, qu'on nomme couramment invariance multifractale ou intermittence (invariance d'échelle locale avec un exposant variable). Une question importante est alors de construire de tels champs aléatoires intermittents reproduisant de façon convaincante les propriétés des phénomènes observés.

Adresses e-mail : Jean.Duchon@ujf-grenoble.fr (J. Duchon), Raoul.Robert@ujf-grenoble.fr (R. Robert).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.06.022

A la suite du travail de Kolmogorov et Obukhov [3,6] sur la dissipation d'énergie dans le fluide turbulent, Mandelbrot [4] introduisit pour la dissipation turbulente ou la volatilité d'un actif la notion de modèle limite-lognormal. Ces réflexions ont trouvé un aboutissement avec la construction par Kahane [2] du chaos multiplicatif gaussien, qui donne un modèle (mesure aléatoire) multifractal naturel pour la volatilité ou la dissipation. La question est alors de modéliser non seulement des quantités positives comme la volatilité ou la dissipation mais l'ensemble du phénomène : processus aléatoire donnant le cours ou champ de vitesse turbulent. L'idée de départ, dûe à Mandelbrot [5], est de construire un modèle du cours d'un actif (en fait de son logarithme) en effectuant un changement de temps aléatoire dans un processus brownien, le changement de temps étant pris indépendant du brownien. En reprenant cette idée Bacry et al. [1] proposent un modèle multifractal du cours d'un actif où le changement de temps est obtenu en prenant la primitive d'un chaos multiplicatif gaussien. Le processus ainsi obtenu reproduit bien certaines propriétés des cours.

Dans cette première partie nous montrons comment cette construction s'étend à plusieurs dimensions et fournit des champs aléatoires.

Ce qui limite l'intérêt de ce modèle (où le brownien et le changement de temps sont indépendants), c'est qu'il implique que la loi des accroissements du processus est forcément symétrique. Or la dissymétrie de cette loi est d'une part un fait empirique patent pour certains types d'actifs [7], et d'autre part une nécessité théorique en turbulence où elle est liée à la dissipation d'énergie cinétique. C'est pourquoi nous présenterons dans une seconde partie un modèle naturel de champ aléatoire ayant à la fois intermittence et dissymétrie. Dans les deux cas la construction s'inspire largement de celle du chaos multiplicatif gaussien.

2. Construction d'un champ aléatoire scalaire multifractal et symétrique sur R^d

Notons $\mathrm{d}W(x)$ un bruit blanc gaussien standard sur $\mathbf{R}^d$. Soit $\varphi(x)$ une fonction sur $\mathbf{R}^d$ à valeurs dans $[0,1]$, C^∞, à symétrie radiale, valant 1 pour $|x| \leqslant 1$ et 0 pour $|x| \geqslant 2$. Pour $R > 0$ fixé on note $\varphi^R(x) = R^{-d/2}\varphi(x/R)$. Soit $k(x) = |x|^{-d/2}$ pour $|x| \leqslant 1$, et 0 pour $|x| > 1$, $k^R(x) = R^{-d/2}k(x/R)$, et $\theta(x)$ une fonction C^∞ à support dans $|x| \leqslant 1$, $\geqslant 0$, symétrique, telle que $\int \theta(x)\,\mathrm{d}x = 1$. (Dans toute la suite nous écrivons $\int$ pour $\int_{\mathbf{R}^d}$.) Notons $\theta^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\theta(x/\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. On notera k_ε^R la régularisée à l'échelle ε de k^R, $k_\varepsilon^R = \theta^\varepsilon \star k^R$, $\rho = k \star k$, $\rho_\varepsilon = \theta^\varepsilon \star \theta^\varepsilon \star \rho$. On vérifie que $\rho(x) = \omega_d \log^+ \frac{1}{|x|} + \phi(x)$, où ω_d est l'aire de la sphère unité de $\mathbf{R}^d$ et ϕ une fonction continue nulle pour $|x| \geqslant 2$.

Soient $\mathrm{d}W_0(y)$, $\mathrm{d}W_1(y)$ deux bruits blancs indépendants, soit γ un paramètre > 0. On note X^ε le champ gaussien régulier centré $X^\varepsilon(y) = \gamma \int k_\varepsilon^R(y-\sigma)\,\mathrm{d}W_1(\sigma)$ dont le noyau de corrélation est $\langle X^\varepsilon(x)X^\varepsilon(y)\rangle = \gamma^2\rho_{\varepsilon/R}(\frac{x-y}{R})$. On se donne un réel α, $0 < \alpha < d$. On peut alors définir le champ aléatoire régulier $\mathcal{X}_x^\varepsilon = R^{d-\alpha}\int \frac{\varphi^R(x-y)}{|x-y|_\varepsilon^{d-\alpha}} \exp[X^\varepsilon(y) - C_\varepsilon]\,\mathrm{d}W_0(y)$ où on note $|\cdot|_\varepsilon = \theta^\varepsilon \star |\cdot|$ et C_ε est une constante de normalisation qui sera choisie de manière à assurer la convergence des champs $\mathcal{X}_x^\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

2.1. Calcul des moments de $\mathcal{X}_x^\varepsilon$ et normalisation

En utilisant les propriétés classiques du bruit blanc et l'indépendance de $\mathrm{d}W_0$, $\mathrm{d}W_1$, on peut calculer pour $p = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[(\mathcal{X}_x^\varepsilon)^{2p}\big] &= C_{2p}\exp\big[2p\big(\gamma^2\rho_{\varepsilon/R}(0) - C_\varepsilon\big)\big] \\ &\quad\times \int\cdots\int f_\varepsilon(y_1)^2\cdots f_\varepsilon(y_p)^2 \exp\Bigg[4\gamma^2\sum_{i<j}\rho_{\varepsilon/R}\bigg(\frac{y_i-y_j}{R}\bigg)\Bigg]\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_p\end{aligned}$$

avec $f_\varepsilon(y) = R^{d-\alpha}\varphi^R(y)/|y|_\varepsilon^{d-\alpha}$ et $C_{2p} = \int \frac{x^{2p}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. (Les moments d'ordre impair sont nuls.) Ceci nous amène à choisir la normalisation $C_\varepsilon = \gamma^2\rho_{\varepsilon/R}(0)$ (on a $C_\varepsilon \to \infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$).

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et obtenir la limite :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\big(\mathcal{X}_x^\varepsilon\big)^{2p} = C_{2p}\int\cdots\int f(y_1)^2\cdots f(y_p)^2\exp\left[4\gamma^2\sum_{i<j}\rho\left(\frac{y_i-y_j}{R}\right)\right]\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_p$$

à condition que l'intégrale

$$\int\cdots\int f(y_1)^2\cdots f(y_p)^2\prod_{i<j}\left|\frac{y_i-y_j}{R}\right|_\star^{-4\gamma^2\omega_d}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_p$$

soit finie (on note $|x|_\star=\inf\{|x|,1\}$ et ici $f=f_0$).

En appliquant la méthode de Kahane [2], on obtient la condition suffisante $\alpha>\frac{d}{2}+4(p-1)\gamma^2\omega_d$. Cette condition montre que pour tout α, $d/2<\alpha<d$, et pour γ « assez petit », il y a un nombre fini de moments de $\mathcal{X}_x^\varepsilon$ qui tendent vers une limite finie pour $\varepsilon\to 0$. Le même calcul donne également la limite de $\mathbf{E}[(\mathcal{X}_{x+h}^\varepsilon-\mathcal{X}_x^\varepsilon)^{2p}]$, on prend cette fois $f(y)=R^{d-\alpha}[|y-h|^{-d+\alpha}\varphi^R(y-h)-|y|^{-d+\alpha}\varphi^R(y)]$.

2.2. *Estimations uniformes en ε et convergence de $\mathcal{X}_x^\varepsilon$ vers un champ $\mathcal{X}_x$*

On peut déduire des calculs précédents que pour γ assez petit ($\alpha>\frac{d}{2}+2\gamma\sqrt{2d\omega_d}$) on peut choisir p de manière à avoir l'estimation uniforme en ε : $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+h}^\varepsilon-\mathcal{X}_x^\varepsilon)^{2p}\leqslant c(|h|/R)^{d+\zeta}$, pour un $\zeta>0$. Comme en outre $\mathbf{E}(\mathcal{X}_0^\varepsilon)^{2p}\leqslant c$, on peut appliquer le critère de compacité de Kolmogorov, et donc, modulo l'extraction d'une sous-suite, supposer que la suite $\mathcal{X}^\varepsilon$ converge en loi vers un certain champ continu $\mathcal{X}$. Pour tout ensemble fini de points $\{x_1,\dots,x_n\}$, on peut calculer la fonction caractéristique C du vecteur aléatoire $(\mathcal{X}_{x_1},\dots,\mathcal{X}_{x_n})$: $C(\xi_1,\dots,\xi_n)=\mathbf{E}\exp[-\frac{1}{2}\int g(y)G(\mathrm{d}y)]$ où $g(y)=R^{2d-2\alpha}[\sum\xi_k|x_k-y|^{-d+\alpha}\varphi^R(x_k-y)]^2$ et $G(dy)$ est la mesure aléatoire obtenue en appliquant à la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^d$ le chaos multiplicatif gaussien de noyau $4\gamma^2\rho(x-y)$. Ceci implique que la loi de $(\mathcal{X}_{x_1},\dots,\mathcal{X}_{x_n})$ est uniquement déterminée, et donc que $\mathcal{X}^\varepsilon$ converge bien en loi vers $\mathcal{X}$. L'expression de la fonction caractéristique montre en outre que la loi de $\mathcal{X}_{x+h}-\mathcal{X}_x$ est symétrique.

2.3. *Moments de $\mathcal{X}$ et scaling*

Comme il n'est pas évident que $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+h}^\varepsilon-\mathcal{X}_x^\varepsilon)^{2p}$ tende vers $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+h}-\mathcal{X}_x)^{2p}$, on calcule cette dernière expression à partir de la fonction caractéristique et on montre que c'est bien la limite de la première pour $\varepsilon\to 0$.

Examinons maintenant la question du scaling. D'après les calculs précédents, on a

$$\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+\lambda e}-\mathcal{X}_x)^{2p}=\int\cdots\int f(y_1)^2\cdots f(y_p)^2\exp\left[4\gamma^2\sum_{i<j}\rho\left(\frac{y_i-y_j}{R}\right)\right]\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_p$$

où $f(y)=R^{d-\alpha}[|y-\lambda e|^{-d+\alpha}\varphi^R(y-\lambda e)-|y|^{-d+\alpha}\varphi^R(y)]$. Par application du théorème de Lebesgue, on montre que pour $\lambda\to 0$: $\mathbf{E}(\mathcal{X}_{x+\lambda e}-\mathcal{X}_x)^{2p}\sim(\lambda/R)^{\zeta_p}C(p,\gamma)\times\int\cdots\int\prod_k(|z_k-\mathrm{e}|^{-d+\alpha}-|z_k|^{-d+\alpha})^2\times\prod_{i<j}|z_i-z_j|^{-4\gamma^2\omega_d}\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_p$ avec $\zeta_p=2p(\alpha-d/2)-p(p-1)2\gamma^2\omega_d$, à condition que l'intégrale soit finie (elle ne dépend pas de e). Une condition suffisante, $\gamma<\frac{2\alpha-d}{8(p-1)\omega_d}$, s'obtient par la méthode de [2].

Références

[1] E. Bacry, J. Delour, J.-F. Muzy, Modelling financial time series using multifractal random walks, Physica A 299 (2001) 84–92.
[2] J.-P. Kahane, Sur le chaos multiplicatif, Ann. Sci. Math. Quebec 9 (1985) 435–444.
[3] A.N. Kolmogorov, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence, J. Fluid Mech. 13 (1962) 83–85.

[4] B.B. Mandelbrot, A possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy in intermittent turbulence, in: M. Roseblatt, C. van Atta (Eds.), Statistical Models and Turbulence, La Jolla, CA, in: Lecture Notes in Phys., vol. 12, Springer, New York, 1972, pp. 333–335.
[5] B.B. Mandelbrot, Heavy tails in finance for independent or multifractal price increments, in: S.T. Rachev (Ed.), Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Elsevier, 2003.
[6] A.M. Obukhov, Some specific features of atmospheric turbulence, J. Fluid Mech. 13 (1962) 77–81.
[7] B. Pochart, J.-P. Bouchaud, The skewed multifractal random walk with applications to option smiles, Quantitative Finance 2 (2002) 303–314.