Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 233–238

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Sur la régularité de Castelnuovo–Mumford des idéaux, en dimension 2

Marc Chardin [a], Amadou Lamine Fall [b]

[a] *Institut de mathématiques de Jussieu, CNRS et université Paris VI, 4, place Jussieu, 75005 Paris, France*
[b] *Département de mathématiques, faculté des sciences, université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal*

Reçu le 13 avril 2005 ; accepté après révision le 7 juin 2005

Disponible sur Internet le 3 août 2005

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous montrons une borne pour la régularité de Castelnuovo–Mumford d'un idéal homogène I d'un anneau de polynômes A en termes du nombre de variables et des degrés des générateurs dans le cas où la dimension de A/I est au plus deux. Cette borne améliore celle obtenue par Caviglia et Sbarra dans [G. Caviglia, E. Sbarra, Characteristic-free bounds for the Castelnuovo–Mumford regularity, Prépublication, math.AC/0310122]. Puis, en s'inspirant de l'article Chardin et D'Cruz [M. Chardin, C. D'Cruz, Castelnuovo–Mumford regularity: examples of curves and surface, J. Algebra 270 (2003) 347–360], nous construisons à partir de familles de courbes monomiales des idéaux homogènes ayant une régularité proche des bornes fournies précédemment. ***Pour citer cet article : M. Chardin, A.L. Fall, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

On the Castelnuovo–Mumford regularity of ideals, in dimension 2. We give a bound on the Castelnuovo–Mumford regularity of a homogeneous ideal I, in a polynomial ring A, in terms of the number of variables and the degrees of generators, when the dimension of A/I is at most two. This bound improves the one obtained by Caviglia and Sbarra in [G. Caviglia, E. Sbarra, Characteristic-free bounds for the Castelnuovo–Mumford regularity, Prépublication, math.AC/0310122]. In the continuation of the examples constructed in Chardin and D'Cruz [M. Chardin, C. D'Cruz, Castelnuovo–Mumford regularity: examples of curves and surface, J. Algebra 270 (2003) 347–360], we use families of monomial curves to construct homogeneous ideals showing that these bounds are quite sharp. ***To cite this article: M. Chardin, A.L. Fall, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Adresses e-mail : chardin@math.jussieu.fr (M. Chardin), fall@math.jussieu.fr (A.L. Fall).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.020

Abridged English version

In this Note we give a refinement of a bound due to Caviglia and Sbarra [2] on the Castelnuovo–Mumford regularity of homogeneous ideals I, in a polynomial ring A over a field, when $\dim(A/I)=2$. If A is of dimension $m+2$, we prove:

Theorem 0.1. *Let I be a homogeneous A-ideal of codimension m generated in degrees $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_s$ with $s>m$. Let $\mathcal{Z}$ be the zero-dimensionnal scheme defined by a general linear section of $X := \operatorname{Proj}(A/I)$, and $i_{\mathcal{Z}} = \operatorname{indeg}(I_{\mathcal{Z}})$ be the smallest degree of a hypersurface containing $\mathcal{Z}$. Then,*

$$\operatorname{reg}(I) \leqslant \big(d_1 d_2 \cdots d_m - \deg(\mathcal{Z}) + 1\big)(d_1 + d_2 + \cdots + d_{m+1} - m - i_{\mathcal{Z}}) + i_{\mathcal{Z}}.$$

This and previous results in the cases of dimensions zero and one give

Corollary 0.2. *If $I \subset A$ is a A-ideal generated in degrees at most d, then*

(i) $\operatorname{reg}(A/I) \leqslant (m+2)(d-1)$ *if* $\dim(A/I) \leqslant 1$,
(ii) $\operatorname{reg}(A/I) \leqslant (m+1)d^m(d-1)$ *if* $\dim(A/I) = 2$.

The bound in (i) is known to be essentially optimal. We provide examples showing that this is also the case for the bound in (ii), at least regarding the power of d involved. The bound obtained by Caviglia and Sbarra in [2, 2.6] is $\operatorname{reg}(A/I) \leqslant (d^m + (d-1)m + 1)^2 - 1$ in case (ii) of Corollary 0.2.

These examples are a continuation of those in [4, 2.3] and [4, 2.5]. They use the monomial curve $\mathcal{C}'_{m,n} \subset \mathbf{P}_k^{m+2}$ parametrized on the affine chart $X_0 = 1$ by $(1 : t : t^{n^m} : t^{n^{m-1}(n+1)} : \cdots : t^{(n+1)^m})$ and its projection $\mathcal{C}_{m,n}$ on $\{X_{m+2} = 0\} \simeq \mathbf{P}_k^{m+1}$.

We provide complete intersection ideals $I_{m,n}$ and $I'_{m,n}$ defining respectively the union of $\mathcal{C}_{m,n}$ and two fat lines and the union of $\mathcal{C}'_{m,n}$ and two fat lines. We then use an estimate on the regularity of the union of the two fat lines, to produce almost complete intersection ideals $\mathfrak{I}_{m,n}$ and $\mathfrak{I}'_{m,n}$ satisfying the following propositions:

Proposition 0.3. *The ideal $\mathfrak{I}'_{m,n} \subset k[X_0,\ldots,X_{m+2}]$ is generated by m forms of degree $n+1$, one form of degree $2^{m-1}+1$ and one form of degree $mn + 2^{m-1}$. One has $\dim(A/\mathfrak{I}'_{m,n}) = 2$ and*

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{I}'_{m,n}) \geqslant n^m + mn + 2^{m-1} - 1.$$

Proposition 0.4. *The ideal $\mathfrak{I}_{m,n} \subset k[X_0,\ldots,X_{m+1}]$ is generated by $m-1$ forms of degree $n+1$, one form of degree $2^{m-2}+n$ and one form of degree $mn + 2^{m-2} - 1$. One has $\dim(A/\mathfrak{I}_{m,n}) = 2$ and*

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{I}_{m,n}) \geqslant n^m + mn + 2^{m-2} - 2.$$

In the setting of Proposition 0.4 the bound given by Theorem 0.1 shows that

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{I}_{m,n}) \leqslant 2m^2 n(n+1)^{m-2}(n+2^{m-2})^2.$$

The exponent of n in this expression is $m+1$ which is one more than its actual value.

1. Un raffinement de la borne de Caviglia et Sbarra, en dimension 2

Dans toute cette section, $A = k[X_0, \ldots, X_{m+1}]$ désigne un anneau de polynômes en $m+2$ variables sur un corps k et $\mathfrak{m} := (X_0, \ldots, X_{m+1})$. Si M est un A-module gradué de type fini, $\mathrm{indeg}(M)$ désigne le minimum des degrés des élément de M si $M \neq 0$. La régularité de Castelnuovo–Mumford de M est définie par

$$\mathrm{reg}(M) = \max_i \bigl\{a_i(M) + i\bigr\} = \max_i \bigl\{b_i(M) - i\bigr\},$$

avec les notations $a_i(M) := \max\{\mu \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M)_\mu \neq 0\}$, si $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ et $a_i(M) := -\infty$ sinon et $b_i(M) := \max\{\mu \mid \mathrm{Tor}_i^R(M,k)_\mu \neq 0\}$ si $\mathrm{Tor}_i^R(M,k) \neq 0$ et $b_i(M) := -\infty$ sinon. Si I est un idéal homogène de A, on pose $I^{\mathrm{sat}} := \bigcup_{j>0}(I : \mathfrak{m}^j)$ de telle sorte que $I^{\mathrm{sat}}/I = H^0_{\mathfrak{m}}(A/I)$. Si $\mathcal{Z} = \mathrm{Proj}(A/I)$ est un sous-schéma de $\mathbf{P}^{m+1}_k$, on pose $I_{\mathcal{Z}} := I^{\mathrm{sat}}$.

En utilisant la méthode de Caviglia et Sbarrra, et un résultat de [3] en dimension 1, nous obtenons le résultat plus précis suivant :

Théorème 1.1. *Soit I un idéal de A de codimension m, engendré en degrés $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_s$ avec $s > m$. Soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble de points défini par une section générale de $X := \mathrm{Proj}(A/I)$, et $i_{\mathcal{Z}} := \mathrm{indeg}(I_{\mathcal{Z}})$. Alors,*

$$\mathrm{reg}(I) \leqslant \bigl(d_1 d_2 \cdots d_m - \deg(\mathcal{Z}) + 1\bigr)(d_1 + d_2 + \cdots + d_{m+1} - m - i_{\mathcal{Z}}) + i_{\mathcal{Z}}.$$

Notons que $\deg(\mathcal{Z}) = \deg(X)$ et que si $\mathcal{C}$ est la composante de dimension 1 de X et $I_{\mathcal{C}}$ son idéal de définition, $d_s \geqslant \mathrm{indeg}(I_{\mathcal{C}}) \geqslant i_{\mathcal{Z}} \geqslant 1$.

Pour la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant qui améliore la borne de [2, 2.3]

Lemme 1.2. *Soit I un idéal homogène de A, tel que $I \neq I : \mathfrak{m}$, l une forme linéaire telle que $I : (l)/I$ soit de longueur finie et q le plus petit entier tel que $I : l^\infty = I : l^q$. Alors on a $q \leqslant a_0(A/I) - \mathrm{indeg}(I^{\mathrm{sat}}) + 1 \leqslant \mathrm{reg}(I) - \mathrm{indeg}(I^{\mathrm{sat}})$.*

Démonstration du Lemme 1.2. La seconde inégalité est claire car $a_0(A/I) + 1 \leqslant \mathrm{reg}(A/I) + 1 = \mathrm{reg}(I)$. Soit $z \in I : l^\infty = I^{\mathrm{sat}}$, et posons $K := a_0(A/I) + 1 - \mathrm{indeg}(I^{\mathrm{sat}})$. Il s'agit de montrer que $zl^K \in I$. On peut supposer z homogène et non nul, ce qui entraîne que $\deg z \geqslant \mathrm{indeg}(I^{\mathrm{sat}})$. On a $zl^K \in (I^{\mathrm{sat}})_{K+\deg(z)}$ et $K + \deg(z) \geqslant a_0(A/I) + 1$. Or $I_\mu = (I^{\mathrm{sat}})_\mu$ pour $\mu \geqslant a_0(A/I) + 1$. Il en découle que $(I^{\mathrm{sat}})_{K+\deg(z)} = I_{K+\deg(z)}$, d'où $zl^K \in I$. □

Démonstration du Théorème 1.1. Soit l_{m+1}, l_{m+2} des formes linéaires telles que $(I : (l_{m+2}))/I$ et $A/(I + (l_{m+1}, l_{m+2}))$ soient de longueurs finies. On suppose de plus que l_{m+2} est assez générale, de telle sorte que, posant $\mathcal{Z} := \mathrm{Proj}(A/I + (l_{m+2}))$, on soit dans les conditions du théorème. (Notons que l'on a $I_{\mathcal{Z}} = (I + (l_{m+2}))^{\mathrm{sat}}$, par définition.)

Appliquons alors les résultats de la preuve de [4, 2.4] avec $c = m$. Comme I est engendré en degrés $\leqslant d_1$, en posant $R := \mathrm{reg}(I + (l_{m+2}))$ on a, par [4, (2.1)],

$$\mathrm{reg}(I) \leqslant \max\{d_1, R\} + \lambda\left(\frac{I : l_{m+2}}{I}\right)$$

où $\lambda(M)$ désigne la longueur d'un A-module M. De plus, d'après [4, (2.2)] et le Lemme 1.2, on a

$$\lambda\left(\frac{I : l_{m+2}}{I}\right) \leqslant \lambda\left(\frac{I_{\mathcal{Z}} + (l_{m+1})}{I + (l_{m+1}, l_{m+2})}\right)(R - i_{\mathcal{Z}}).$$

D'autre part,

$$\lambda\left(\frac{I_{\mathcal{Z}}+(l_{m+1})}{I+(l_{m+1},l_{m+2})}\right)=\lambda\left(\frac{A}{I+(l_{m+1},l_{m+2})}\right)-\lambda\left(\frac{A}{I_{\mathcal{Z}}+(l_{m+1})}\right)\leqslant d_1\cdots d_m-\deg(\mathcal{Z}),$$

car $I+(l_{m+1},l_{m+2})$ contient une intersection complète de degrés $d_1,\ldots,d_m,1,1$.

On a donc au total :

$$\operatorname{reg}(I)\leqslant\max\{d_1,R\}+\big(d_1\cdots d_m-\deg(\mathcal{Z})\big)(R-i_{\mathcal{Z}}).$$

D'après [3, 3.3], $R\leqslant d_1+\cdots+d_{m+1}-m$, d'où la borne annoncée. □

Corollaire 1.3. *Soit $I\subset A=k[X_0,\ldots,X_{m+1}]$ un idéal engendré en degrés au plus d. Alors,*

(i) $\operatorname{reg}(A/I)\leqslant(m+2)(d-1)$ *si* $\dim(A/I)\leqslant 1$,
(ii) $\operatorname{reg}(A/I)\leqslant(m+1)d^m(d-1)$ *si* $\dim(A/I)=2$.

Démonstration. Le cas (i) découle de [3, 3.3], et le (ii) du Théorème 1.1 une fois noté que $\deg(\mathcal{Z})\geqslant 1$ et $i_{\mathcal{Z}}\geqslant 1$. □

Dans [4, 2.6], Caviglia et Sbarra montrent la borne suivante dans le cas (ii) du Corollaire 1.3 : $\operatorname{reg}(A/I)\leqslant(d^m+(d-1)m+1)^2-1$.

2. Premier exemple d'idéaux

Soit $m\geqslant 1$ et $n\geqslant 2$ deux entiers, $A'=k[X_0,\ldots,X_{m+2}]$, $\mathfrak{b}'_{m,n}$ l'idéal de la courbe monomiale $\mathcal{C}'_{m,n}\subset\mathbf{P}^{m+2}$ paramétrée sur la carte affine $X_0=1$ par $(1:t:t^{n^m}:t^{n^{m-1}(n+1)}:\cdots:t^{(n+1)^m})$.

Les polynômes $F_i=X_i^{n+1}-X_0X_{i+1}^n$ pour $2\leqslant i\leqslant m+1$ sont dans $\mathfrak{b}'_{m,n}$.

Définissons par récurrence sur m, $f_1(X_2,X_3):=\frac{X_3}{X_2}$ et $f_m(X_2,\ldots,X_{m+2}):=f_{m-1}(\frac{X_3}{X_2},\ldots,\frac{X_{m+2}}{X_{m+1}})$. On note que si $m=1$, et $x=(x_0:\cdots:x_3)\in\mathcal{C}'_{1,n}$ avec $x_0x_1\neq 0$, alors $f_1(x_2,x_3)=\frac{x_1}{x_0}$. D'autre part, si $m>1$ et $x=(1:x_1:\cdots:x_{m+2})\in\mathcal{C}'_{m,n}$ avec $x_1\neq 0$, alors $(1:x_1:\frac{x_3}{x_2}:\cdots:\frac{x_{m+2}}{x_{m+1}})\in\mathcal{C}'_{m-1,n}$; on en déduit par récurrence sur m que $f_m(x_2,\ldots,x_{m+2})=x_1$. De plus, on vérifie, par récurrence sur m, que

$$f_m(X_2,\ldots,X_{m+2})^{(-1)^m}=\prod_{j=0}^{m}X_{j+2}^{(-1)^j\binom{m}{j}}=\frac{P_m(X_2,X_4,\ldots)}{Q_m(X_3,X_5,\ldots)}$$

où P_m et Q_m sont des polynômes homogènes de degré 2^{m-1}. Il en découle que le polynôme défini par $F'_1:=X_0P_m-X_1Q_m$ si m est pair et $F'_1:=X_1P_m-X_0Q_m$ si m est impair appartient à $\mathfrak{b}'_{m,n}$. Soit $I'_{m,n}:=(F'_1,F_2,\ldots,F_{m+1})$.

Lemme 2.1. *On a $I'_{m,n}=\mathfrak{b}'_{m,n}\cap J'_{m,n}\cap K'_{m,n}$, où $J'_{m,n}$ est un idéal $(X_2,\ldots,X_{m+2})$-primaire et $K'_{m,n}$ est un idéal $(X_0,X_2,\ldots,X_{m+1})$-primaire. En particulier $I'_{m,n}$ est une intersection complète de codimension $m+1$.*

Démonstration. Soit $J':=(X_2,\ldots,X_{m+2})$ et $K':=(X_0,X_2,\ldots,X_{m+1})$. Le schéma $\mathcal{Z}'_{m,n}:=\operatorname{Proj}(A'/I'_{m,n})$ contient les droites $D:=\operatorname{Proj}(A'/J')$ et $D':=\operatorname{Proj}(A'/K')$. De plus $\mathcal{Z}'_{m,n}\cap\{X_0=0\}$ est supporté sur D'.

Montrons que sur la carte affine $X_0=1$, $\mathcal{Z}'_{m,n}$ est l'union d'un schéma supporté sur D et de $\mathcal{C}'_{m,n}$. On note que si $X_2\neq 0$, alors $X_i\neq 0$ pour tout i. Lorsque $m=1$, on a $X_2^{n+1}=X_3^n=(X_1X_2)^n$ d'où $X_2=X_1^n$ puis $X_3=X_1X_2=X_1^{n+1}$. Si $m>1$, on pose $Y_1:=X_1$ et $Y_i:=\frac{X_{i+1}}{X_i}$ pour $2\leqslant i\leqslant m+1$ et on remarque que $X_i=Y_i^n$ pour $2\leqslant i\leqslant m+1$, d'où $Y_i^{n+1}=Y_{i+1}^n$ pour $2\leqslant i\leqslant m$. Par définition $f_{m-1}(Y_2,\ldots,Y_{m+1})=f_m(X_2,\ldots,X_{m+2})$. Par récurrence sur m on en déduit que $Y_i = Y_1^{n^{m-i+1}(n+1)^{i-2}}$, d'où $X_i = Y_i^n = Y_1^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}} = X_1^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}}$ pour $2 \leqslant i \leqslant m+1$. De plus $X_{m+2} = X_{m+1}Y_{m+1} = X_1^{n(n+1)^{m-1}} Y_1^{(n+1)^{m-1}} = X_1^{(n+1)^m}$. Ceci montre, comme annoncé, que $\mathcal{Z}'_{m,n}$ coïncide avec $\mathcal{C}'_{m,n}$ hors de $D \cup D'$.

$\mathcal{Z}'_{m,n}$ est donc de codimension $m+1$. Ainsi $(F'_1, F_2, \ldots, F_{m+1})$ est nécessairement une suite régulière dans A' et $I'_{m,n}$ est purement de codimension $m+1$. Le lemme en découle. □

L'idéal $\mathfrak{b}'_{m,n}$ étant radical, on a $\operatorname{reg}(J'_{m,n} \cap K'_{m,n}) < \operatorname{reg}(I'_{m,n}) = mn + 2^{m-1} + 1$ par [5, 4.2]. En particulier, $\mathfrak{a}'_{m,n} := J'_{m,n} \cap K'_{m,n}$ est engendré en degrés au plus $mn + 2^{m-1}$. Il existe donc $F' \in \mathfrak{a}'_{m,n} \setminus \mathfrak{b}'_{m,n}$ homogène de degré $d' := mn + 2^{m-1}$. On pose $\mathfrak{I}'_{m,n} := I'_{m,n} + (F')$.

Proposition 2.2. *L'idéal $\mathfrak{I}'_{m,n}$ est engendré par m polynômes de degré $n+1$, un polynôme de degré $2^{m-1}+1$ et un polynôme de degré $mn + 2^{m-1}$. On a $\dim(A'/\mathfrak{I}'_{m,n}) = 2$ et*

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{I}'_{m,n}) \geqslant n^m + mn + 2^{m-1} - 1.$$

Démonstration. On a une suite exacte $0 \to A'/\mathfrak{b}'_{m,n}[-d'] \xrightarrow{\times F'} A'/I'_{m,n} \to A'/\mathfrak{I}'_{m,n} \to 0$ d'où on déduit que $H^0_{\mathfrak{m}}(A'/\mathfrak{I}'_{m,n}) \simeq H^1_{\mathfrak{m}}(A'/\mathfrak{b}'_{m,n})[-d']$ car $A'/I'_{m,n}$ est Cohen–Macaulay de dimension 2. En particulier

$$a_0(A'/\mathfrak{I}'_{m,n}) = a_1(A'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + d'.$$

On note que $X_1^{n^m} - X_0^{n^m-1}X_2$ est un générateur minimal de $\mathfrak{b}'_{m,n}$. Donc $\operatorname{reg}(\mathfrak{b}'_{m,n}) \geqslant n^m$. Comme d'autre part pour (m,n) distinct de $(2,2)$, $(3,2)$ et $(4,2)$,

$$a_2(A'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + 2 < a_2(A'/I'_{m,n}) + 2 = \operatorname{reg}(A'/I'_{m,n}) = mn + 2^{m-1} \leqslant n^m - 1$$

on a $a_1(A'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + 1 = \operatorname{reg}(A'/\mathfrak{b}'_{m,n}) \geqslant n^m - 1$ dans ces cas. Lorsque $m = 2, 3, 4$ et $n = 2$ on vérifie directement en utilisant le logiciel Macaulay 2 [6] que $a_1(A'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + 1 = \operatorname{reg}(A'/\mathfrak{b}'_{m,n}) = n^m - 1$. La proposition en découle. □

3. Second exemple d'idéaux

Soit $m \geqslant 2$, $A = k[X_0, \ldots, X_{m+1}]$ et $\mathfrak{b}_{m,n} = \mathfrak{b}'_{m,n} \cap A$ l'idéal de la courbe monomiale $\mathcal{C}_{m,n} \subset \mathbf{P}^{m+1}$ paramétrée sur la carte affine $X_0 = 1$ par $(1 : t : t^{n^m} : t^{n^{m-1}(n+1)} : \cdots : t^{n(n+1)^{m-1}})$, projection de la courbe $\mathcal{C}'_{m,n}$ sur l'hyperplan $X_{m+2} = 0$.

Les polynômes $F_i = X_i^{n+1} - X_0 X_{i+1}^n$ pour $2 \leqslant i \leqslant m$ sont dans $\mathfrak{b}_{m,n}$. Soit $F_1 := X_1^n P_{m-1} - X_0^n Q_{m-1}$ si m est pair et $F_1 := X_0^n P_{m-1} - X_1^n Q_{m-1}$ si m est impair. On remarque que $F_1 \in \mathfrak{b}_{m,n}$ et on pose $I_{m,n} := (F_1, \ldots, F_m)$.

Lemme 3.1. *On a $I_{m,n} = \mathfrak{b}_{m,n} \cap J_{m,n} \cap K_{m,n}$, où $J_{m,n}$ est un idéal $(X_2, \ldots, X_{m+1})$-primaire et $K_{m,n}$ est un idéal $(X_0, X_2, \ldots, X_m)$-primaire. En particulier $I_{m,n}$ est une intersection complète de codimension m.*

Démonstration. Soit $J := (X_2, \ldots, X_{m+1})$ et $K := (X_0, X_2, \ldots, X_m)$. Le schéma $\mathcal{Z}_{m,n} := \operatorname{Proj}(A/I_{m,n})$ contient les droites $\Delta := \operatorname{Proj}(A/J)$ et $\Delta' := \operatorname{Proj}(A/K)$, et $\mathcal{Z}_{m,n} \cap \{X_0 = 0\}$ est supporté sur Δ'.

Montrons que sur la carte affine $X_0 = 1$, $\mathcal{Z}_{m,n}$ est l'union d'un schéma supporté sur Δ et de $\mathcal{C}_{m,n}$. Si $X_2 \neq 0$, alors $X_i \neq 0$ pour tout i. Lorsque $m = 2$, on a $X_2^{n+1} = X_3^n = (X_1^n X_2)^n$ d'où $X_2 = X_1^{n^2}$ puis $X_3 = X_1^n X_2 = X_1^{n(n+1)}$. Si $m > 2$, on pose $Y_1 := X_1$ et $Y_i := \frac{X_{i+1}}{X_i}$ pour $2 \leqslant i \leqslant m$ et on remarque que $X_i = Y_i^n$ pour $2 \leqslant i \leqslant m$ d'où $Y_i^{n+1} = Y_{i+1}^n$ pour $2 \leqslant i \leqslant m-1$. Par définition $f_{m-2}(Y_2, \ldots, Y_m) = f_{m-1}(X_2, \ldots, X_{m+1})$. Par récurrence sur m

on en déduit que $Y_i = Y_1^{n^{m-i+1}(n+1)^{i-2}}$, d'où $X_i = Y_i^n = Y_1^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}} = X_1^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}}$ pour $2 \leqslant i \leqslant m$. De plus $X_{m+1} = X_m Y_m = X_1^{n^2(n+1)^{m-2}} Y_1^{n(n+1)^{m-2}} = X_1^{n(n+1)^{m-1}}$.

$\mathcal{Z}_{m,n}$ est donc supporté sur la réunion de $\mathcal{C}_{m,n}$, Δ et Δ', et ainsi $(F_1, \ldots, F_m)$ forme nécessairement une suite régulière dans A. On conclut comme pour le Lemme 2.1. □

On a $\operatorname{reg}(J_{m,n} \cap K_{m,n}) < \operatorname{reg}(I_{m,n}) = mn + 2^{m-2}$, en particulier $\mathfrak{a}_{m,n} := J_{m,n} \cap K_{m,n}$ est engendré en degrés au plus $mn + 2^{m-2} - 1$. Il existe donc $F \in \mathfrak{a}_{m,n} \setminus \mathfrak{b}_{m,n}$ homogène de degré $d := mn + 2^{m-2} - 1$.

En posant $\mathfrak{I}_{m,n} := I_{m,n} + (F)$, on a

Proposition 3.2. *L'idéal $\mathfrak{I}_{m,n}$ est engendré par $m-1$ polynômes de degré $n+1$, un polynôme de degré $2^{m-2}+n$ et un polynôme de degré $mn + 2^{m-2} - 1$. On a* $\dim(A/\mathfrak{I}_{m,n}) = 2$ *et*

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{I}_{m,n}) \geqslant n^m + mn + 2^{m-2} - 2.$$

Démonstration. On a une suite exacte $0 \to A/\mathfrak{b}_{m,n}[-d] \xrightarrow{\times F} A/I_{m,n} \to A/\mathfrak{I}_{m,n} \to 0$ d'où on déduit que $a_0(A/\mathfrak{I}_{m,n}) = a_1(A/\mathfrak{b}_{m,n}) + d$ car $A/I_{m,n}$ est Cohen–Macaulay de dimension 2. On note que $X_1^{n^m} - X_0^{n^m-1} X_2$ est un générateur minimal de $\mathfrak{b}_{m,n}$. Donc $\operatorname{reg}(\mathfrak{b}_{m,n}) \geqslant n^m$. Comme d'autre part si (m,n) est distinct de $(2,2)$ et $(3,2)$,

$$a_2(A/\mathfrak{b}_{m,n}) + 2 < a_2(A/I_{m,n}) + 2 = \operatorname{reg}(A/I_{m,n}) = mn + 2^{m-2} \leqslant n^m - 1$$

on a $a_1(A/\mathfrak{b}_{m,n}) + 1 = \operatorname{reg}(A/\mathfrak{b}_{m,n}) \geqslant n^m - 1$ dans ces cas. Lorsque $m = 2$ ou $m = 3$, on a $a_1(A/\mathfrak{b}_{m,n}) + 1 = \operatorname{reg}(A/\mathfrak{b}_{m,n}) = n^m - 1$ d'après [1] si $m = 2$ et [4, 2.6 (3)] si $m = 3$. La proposition en découle. □

Remarque 1. Lorsque $m = 2$ ou $m = 3$ on a plus précisément

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{I}_{m,n}) = n^m + mn + 2^{m-2} - 2,$$

car $\operatorname{reg}(\mathfrak{b}_{m,n}) = a_1(A/\mathfrak{b}_{m,n}) + 2 = n^m$ d'après [1] si $m = 2$ et [4, 2.6 (3)] si $m = 3$. D'autre part, d'après [7, 5.5], $\operatorname{reg}(\mathfrak{b}_{m,n}) \leqslant n^m + n(n+1)^{m-2} - 1$ pour tout m, et ainsi

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{I}_{m,n}) \leqslant n^m + n(n+1)^{m-2} + mn + 2^{m-2} - 3.$$

Ceci doit être comparé à la borne founie par le Théorème 1.1, qui donne, après quelques simplifications,

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{I}_{m,n}) \leqslant 2m^2 n(n+1)^{m-2}(n + 2^{m-2})^2.$$

L'exposant de n dans cette expression diffère donc de un par rapport à sa vraie valeur.

Références

[1] H. Bresinsky, F. Curtis, M. Fiorentini, L.T. Hoa, On the structure of local cohomology modules for monomial curves in P_K^3, Nagoya Math. J. 136 (1994) 81–114.

[2] G. Caviglia, E. Sbarra, Characteristic-free bounds for the Castelnuovo–Mumford regularity, Prépublication, math.AC/0310122.

[3] M. Chardin, Regularity of ideals and their powers, Prépublication 364, Institut de mathématiques de Jussieu, Mars 2004.

[4] M. Chardin, C. D'Cruz, Castelnuovo–Mumford regularity: examples of curves and surface, J. Algebra 270 (2003) 347–360.

[5] M. Chardin, B. Ulrich, Liaison and the Castelnuovo–Mumford regularity, Amer. J. Math. 124 (2002) 1103–1124.

[6] D. Grayson, M. Stillman, Macaulay 2 software, http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/.

[7] S. L'vovsky, On inflection points, monomial curves, and hypersurfaces containing projective curves, Math. Ann. 306 (4) (1996) 719–735.