Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 259–264

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique/Probabilités

Calcul de densités prédictives dans le modèle bayésien de Cox–Dirichlet à censures fixes

Fatiha Messaci

Département de mathématiques, université Mentouri, route d'Ain El Bey, 25000 Constantine, Algérie

Reçu le 12 juillet 2004 ; accepté après révision le 20 juin 2005

Disponible sur Internet le 15 août 2005

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Dans cette Note nous étendons au cas d'observations censurées par des constantes le calcul des densités prédictives dans le modèle non paramétrique bayésien de Cox–Dirichlet effectué, pour des observations non censurées, par N. Gouget et J.P. Raoult [N. Gouget, J.P. Raoult, Computation of predictive densities in the semi-parametric Bayesian Cox–Dirichlet model, Non Parametric Statistics 10 (1999) 307–341]. Nous calculons les densités restreintes à des sous ensembles des faces, parties caractérisées par la fixation des variables censurées et comportant des égalités et des inégalités strictes entre les observations non censurées. ***Pour citer cet article : F. Messaci, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Computation of predictive densities in the Bayesian Cox–Dirichlet model with fixed censoring. This Note is devoted to the extension, to observations censored by constants, of the computation of predictive densities in the nonparametric Bayesian Cox–Dirichlet model, which has been developed for noncensored observations by N. Gouget and J. P. Raoult [N. Gouget, J.P. Raoult, Computation of predictive densities in the semi-parametric Bayesian Cox–Dirichlet model, Non Parametric Statistics 10 (1999) 307–341]. We compute the densities of restrictions to subsets of sides, i.e. the subsets characterized by fixing the censored variables and by setting equalities and strict inequalities between the noncensored observations. ***To cite this article: F. Messaci, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abridged English version

A finite measure on $\mathbb{R}^n$ is said piecewise regular (see [3]) if, for any permutation $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ the restriction of its survival function (s.f.) S to

$$\bar{\Delta}_\sigma = \left\{(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\colon \forall j \in \{1, \dots, n-1\}\ t_{\sigma_j} \leqslant t_{\sigma_{j+1}}\right\},$$

admits a continuous n-derivative.

Adresse e-mail : f_messaci@yahoo.fr (F. Messaci).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.015

Such a measure is not necessary absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$ but absolute continuity holds for its restriction to any l dimensional (with $1 \leqslant l \leqslant n$) subset defined by equalities and strict inequalities between coordinates, that is any

$$\Delta_\sigma^\lambda = \left\{(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\colon \forall j \in \{1,\dots,l\}\ t_{\sigma_{n_{j-1}+1}} = \cdots = t_{\sigma_{n_j}},\ \forall j \in \{1,\dots,l-1\}\ t_{\sigma_{n_j}} < t_{\sigma_{n_j+1}}\right\},$$

where $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ with $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = n$ and $n_j = \sum_{h=1}^{j} \lambda_h$ (with $n_0 = 0$). The so defined densities are given in [3].

In this Note we are interested with the computation of densities for a piecewise regular probability censored by constants, i.e. we consider the variables $X_i = T_i \wedge \tau_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ where μ the distribution of $(T_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ is piecewise regular and where τ_i is a fixed value for all $1 \leqslant i \leqslant n$. On the open set (in $[0,\infty]^n$) $\prod_{i=1}^{n}]0, \tau_i[$ the study is the same that for the non censored case given in [3]. It remains to compute the restricted densities to subsets characterized by fixing the censored variables and by setting equalities and strict inequalities between non censored variables. We give the expression of these densities in Theorem 2.1. Furthermore we apply this result to derive the densities for the special case where μ is the predictive measure in the Cox–Dirichlet model (see Theorem 3.1). In this model T_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ are independent strictly positive variables and there exists a baseline s.f. G and strictly positive fixed constants c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ so that the s.f. of T_i is G^{c_i}. G is unknown and endowed with a Dirichlet prior. Details of proofs and computations are given in [7] and [6].

1. Introduction

Dans [3], Gouget et Raoult introduisent la notion de mesure régulière par portions sur $\mathbb{R}^n$ et, partant de la fonction de survie de la loi prédictive dans le modèle bayésien de Cox–Dirichlet, calculée dans [8], ils montrent que la mesure qui lui est associée rentre dans ce cadre. Ils en déduisent les densités restreintes de la loi prédictive à des sous ensembles caractérisés par des égalités et des inégalités strictes entre les observations. Pour préciser ce résultat, rappelons les notions et notations suivantes de [3].

Une configuration d'ex æquo est toute suite de nombres entiers strictement positifs $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ telle que $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = n$. Nous notons $n_j = \sum_{h=1}^{j} \lambda_h$ (avec $n_0 = 0$). Pour chaque n-permutation $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ et chaque configuration d'ex æquo λ, nous introduisons le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\Delta_\sigma^\lambda = \left\{(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\colon \forall j \in \{1,\dots,l\}\ t_{\sigma_{n_{j-1}+1}} = \cdots = t_{\sigma_{n_j}},\ \forall j \in \{1,\dots,l-1\}\ t_{\sigma_{n_j}} < t_{\sigma_{n_j+1}}\right\}.$$

Δ_σ^λ est l'ensemble de toutes les suites dans $\mathbb{R}^n$ qui peuvent être réordonnées en croissant par l'usage de la permutation σ et dans lesquelles il y a exactement l blocs d'ex æquo qui, lorsqu'on les recense en croissant, ont les tailles successives $\lambda_1,\dots,\lambda_l$.

Pour $\lambda = (1,\dots,1)$, suite de longueur n dont tous les éléments sont égaux à 1, nous obtenons les sous ensembles $\Delta_\sigma = \{(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\colon \forall j \in \{1,\dots,n-1\}\ t_{\sigma_j} < t_{\sigma_{j+1}}\}$; la fermeture de Δ_σ est $\bar{\Delta}_\sigma = \{(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\colon \forall j \in \{1,\dots,n-1\}\ t_{\sigma_j} \leqslant t_{\sigma_{j+1}}\}$.

Si σ est la permutation identité, nous obtenons les ensembles notés

$$\Delta^\lambda = \left\{(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\colon \forall j \in \{1,\dots,l\}\ t_{n_{j-1}+1} = \cdots = t_{n_j},\ \forall j \in \{1,\dots,l-1\}\ t_{n_j} < t_{n_j+1}\right\}.$$

Soit A une partie de $\mathbb{R}^l$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$. Soit $s = (s_1,\dots,s_k)$ une suite d'entiers distincts dans $\{1,\dots,l\}$. La k dérivée partielle $\frac{\partial^k f}{\partial x_{s_1},\dots,\partial x_{s_k}}$ de f est notée $\partial_s f$.

Une mesure finie sur $\mathbb{R}^n$ est dite régulière par portions si, pour toute n-permutation σ, la restriction de sa fonction de survie, S, à $\bar{\Delta}_\sigma$, notée $\widehat{S}_\sigma$, admet la n-dérivée continue $\partial_{1,\dots,n}\widehat{S}_\sigma$.

La densité de la restriction d'une telle mesure à Δ^λ est donnée dans le Théorème 2 de [3] ; le passage de Δ^λ à Δ_σ^λ se fait alors par permutation.

Dans [5] Messaci étend cette étude au cas où des censures aléatoires à droite, à gauche ou mixtes, elles même régies par un modèle bayésien de Cox–Dirichlet, sont appliquées aux observations. La mesure prédictive obtenue jouit encore de la propriété de régularité par portions et les calculs des densités des restrictions de cette loi aux ensembles Δ_σ^λ en sont déduits, dans le cas de la censure à droite.

Mais comme expliqué et illustré par des exemples réels, entre autres, dans Klein et Moeschberger (cf. [4]), dans la pratique les censures peuvent être aussi bien aléatoires que fixes. Ainsi dans les essais cliniques ou industriels, le temps d'étude doit trés souvent être fixé au préalable en raison de contraintes techniques ou légales, ce qui constitue une censure fixe. C'est pourquoi dans ce travail, dont une version plus détaillée est [7], nous nous intéressons au cas des censures fixes appliquées à des temps de survie toujours régis par un modèle bayésien de Cox–Dirichlet. De façon précise, nous observons n variables aléatoires positives censurées $X_i = T_i \wedge \tau_i$. τ_i est fixé pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$. Les variables aléatoires T_i sont strictement positives indépendantes et il existe une fonction de survie de base G et une suite de nombres strictement positifs $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, appelés contraintes, de sorte que la fonction de survie de T_i soit la puissance G^{c_i}. Par ailleurs la famille des lois de base est munie de l'a priori de Dirichlet défini dans [1] et caractérisé par la mesure α^*, de fonction de survie α. Rappelons (voir par exemple [2]) que cela signifie que pour pour toute suite strictement croissante $(u_0, u_1, \ldots, u_s, u_{s+1})$ où $u_0 = 0$ et $u_{s+1} = +\infty$, la suite aléatoire $(1 - G(u_1), G(u_1) - G(u_2), \ldots, G(u_{s-1}) - G(u_s))$ admet pour densité, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^s$, l'application :

$$(y_1, \ldots, y_s) \longrightarrow \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_{s+1})}\prod_{i=1}^{s} y_i^{\alpha_i-1} \times \left(1 - \sum_{i=1}^{s} y_i\right)^{\alpha_{s+1}-1} 1_{As}(y_1, \ldots, y_s)$$

où Γ désigne la fonction gamma eulérienne, $A_s = \{(y_i)_{1\leqslant i\leqslant s}\colon\ \forall i\ 0 < y_i < 1,\ \sum_{i=1}^{s} y_i < 1\}$ et $\forall i \in \{1, \ldots, s+1\}$ $\alpha_i = \alpha^*(]u_{i-1,} u_i])$, $\alpha_0 = \sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i$.

La loi prédictive des (T_i) a été donnée pour tout $t = (t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ par M. Ruggiero, dans [8], par l'expression suivante :

$$S(t) = \frac{\Gamma(\alpha(0))}{\Gamma(\alpha(0) + d)}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha(t_{\sigma_i}) + d_i^\sigma)}{\Gamma(\alpha(t_{\sigma_i}) + d_{i+1}^\sigma)} \tag{1}$$

où :

- $\alpha(0)$ est la masse totale de la mesure α^*,
- $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est une permutation réordonnant en croissant la suite $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, c'est à dire telle que la suite $(t_{\sigma_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ soit croissante,
- $d_i^\sigma = \sum_{h=i}^{n} c_{\sigma_h}$ avec $d_{n+1}^\sigma = 0$ et $d = d_1^\sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i$.

La loi prédictive des (X_i) est concentrée sur $\prod_{i=1}^{n}[0, \tau_i]$ et perd la propriété de régularité par portions. Cependant sur $\prod_{i=1}^{n}[0, \tau_i[$ l'étude est la même que dans le cas non censuré considéré par Gouget et Raoult dans [3]. Il reste donc à calculer les densités restreintes aux faces, ensembles caractérisés par la fixation des variables censurées. Nous traitons d'abord le cas général d'une mesure régulière par portions censurée par des constantes puis nous appliquons le résultat obtenu au cas particulier de la mesure prédictive dans le modèle bayésien de Cox–Dirichlet.

2. Calcul des densités

Soit $(T_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur aléatoire de loi μ régulière par portions, de fonction de survie S. On s'intéresse à la loi du vecteur aléatoire $(T_i \wedge \tau_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où τ_i est une censure (à droite) fixe pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$.

Chacune des faces est caractérisée par l'ensemble $\mathcal{C}$ des indices i qui y sont fixés à la valeur de la censure τ_i. Soit donc $\mathcal{C} = \{(c_1, \ldots, c_b) \subseteq \{1, \ldots, n\},\ c_1 < c_2 < \cdots < c_b\}$; la face de dimension $n - b$ associée est $\mathcal{F}_\mathcal{C} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \mathcal{C}\ x_i = \tau_i, \forall i \notin \mathcal{C}\ x_i < \tau_i\}$.

En tenant compte du fait que, si $i \notin \mathcal{C}$, alors $x_i < \tau_i$, nous déduisons que $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ a une intersection vide, avec certains des ensembles Δ_σ. Cependant il est élémentaire que pour toute permutation σ telle que $\Delta_\sigma \cap \mathcal{F}_\mathcal{C}$ n'est pas vide, la restriction de la mesure prédictive à $\Delta_\sigma \cap \mathcal{F}_\mathcal{C}$ admet, pour densité, le produit par $(-1)^{n-b}$ de la $\{r_1, \ldots, r_{n-b}\}$-dérivée de S_σ où $r_j \notin \mathcal{C}$ pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant n-b$. Reste à étudier la restriction au complémentaire, dans $\mathcal{F}_\mathcal{C}$, de $\bigcup_\sigma (\Delta_\sigma \cap \mathcal{F}_\mathcal{C})$, qui se compose de deux types de parties :

1. Des parties pour lesquelles une variable non censurée prend la valeur d'une variable censurée ; elles sont de mesure nulle puisque pour une mesure régulière par portions, toute variété linéaire parallèle à un axe de coordonnée a une mesure nulle.

2. Des parties comprenant des ex æquo d'une part entre des valeurs de variables non censurées et (ou) d'autre part entre des valeurs de variables censurées ; ce sont les $\Delta^{\lambda,\delta}$ que nous allons étudier maintenant en nous restreignant aux suites croissantes d'observations puisque les autres cas s'en déduisent par permutations.

Soit $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{l'})$ la configuration d'ex æquo de la suite croissante d'observations $(x_1, \ldots, x_n)$. On définit la « suite de regroupements » (qui a la structure d'une configuration d'ex æquo) λ à partir de λ' en conservant les effectifs des blocs d'ex æquo de valeurs non censurées mais en remplaçant par $(1, \ldots, 1)$ (suite de longueur λ'_h) tout $\lambda'_h \neq 1$ caractérisant des valeurs censurées ex æquo.

On pose $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ et on introduit δ, suite de 1 et de 0 composée des indicateurs de censure de λ, où 1 est associé à toute observation censurée et 0 est associé à tout bloc d'observations non censurées ; on a $b = \sum_{j=1}^{l} \delta_j$.

Alors $\Delta^{\lambda,\delta}$ est l'ensemble des suites croissantes $(t_1, \ldots, t_n)$ telles que, si on note $n_j = \sum_{h=1}^{j} \lambda_h$,

(i) pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ $t_{n_{j-1}+1} = \cdots = t_{n_j}$,
(ii) pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant l-1)$ tel que $(\delta_j, \delta_{j+1}) \neq (1,1)$ $t_{n_j} < t_{n_j+1}$,
(iii) pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ et tout i $(n_{j-1} < i \leqslant n_j)$
si $\delta_j = 0$ alors $t_i < \tau_i$,
si $\delta_j = 1$ alors $t_i = \tau_i$.

Remarquons d'une part que la condition (iii) veut dire que $\Delta^{\lambda,\delta}$ est inclus dans $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ et d'autre part que $\Delta^{\lambda,\delta}$ est en bijection avec un sous ensemble de $\mathbb{R}^{l-b}$ par l'application : $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mapsto (t_{n_j})_{j \mid \delta_j = 0}$, ce qui permet de définir la mesure de Lebesgue sur $\Delta^{\lambda,\delta}$ par transport de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{l-b}$.

Grâce à une opération de suppression des censures détaillée dans [7] et [6], nous nous ramenons au cas non censuré, ce qui nous permet d'appliquer le Théorème 2 de [3]. Ensuite par réintroduction des censures, nous arrivons au résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soit μ une mesure régulière par portions sur $\mathbb{R}^n$, de fonction de survie S, à laquelle on applique n censures (à droite) fixes $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Soit $\lambda = (\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant l}$ une suite de regroupement et $\delta = (\delta_j)_{1 \leqslant j \leqslant l}$ une suite d'indicateurs de censure compatible avec λ (i.e. si $\delta_j = 1$, $\lambda_j = 1$) ; le nombre de censures défini par δ est $b = \sum_{j=1}^{l} \delta_j$. Notons $A^\lambda = \{0,1\}^{n-l}$ et $S_\sigma(t_1, \ldots, t_n) = S(t_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, t_{\sigma^{-1}(n)})$.*

Alors la restriction de μ à la portion de face $\Delta^{\lambda,\delta}$ admet pour densité, par rapport à la mesure de Lebesgue, la fonction :

$$g^{\lambda,\delta} = \sum_{a \in A^\lambda} (-1)^{q(a)} \partial_{s(a)} S_{\sigma(a)}, \tag{2}$$

où, si on note $a = ((a_m^j)_{1 \leqslant m \leqslant \lambda_j - 1})_{1 \leqslant j \leqslant l}$, on obtient, avec $n_j = \sum_{h=1}^{j} \lambda_h$:

- $q(a) = n - \sum_{j=1}^{l} \sum_{m=1}^{\lambda_j - 1} a_m^j - b$,
- $s(a) = (s_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$, $k = l - b$

avec $s_j = 1 + n_{p_j-1} + \sum_{m=1}^{\lambda_{p_j}-1} a_m^{p_j}$, *où* p_j *est le* $j^{\text{ième}}$ *indice* m *tel que* $\delta_m = 0$,

- $(\sigma(a))^{-1} = ((\pi_\nu^j)_{1\leqslant\nu\leqslant\lambda_j})_{1\leqslant j\leqslant l}$ *avec* $\pi_\nu^j = n_{j-1} + 1 + \sum_{u=1}^{\nu-1} a_u^j + (1-a_\nu^j)(\lambda_j - \nu)$.

Example. Soit $\Delta^{\lambda,\delta}$ l'ensemble des suites $(t_1,\ldots,t_9)$ telles que

$$t_1 < t_2 < t_3 = t_4 = t_5 < t_6 = t_7 < t_8 = t_9,$$

où l'ensemble des indices de censure est $\mathcal{C} = \{1,2,6,7\}$.

Ici $\lambda' = (1,1,3,2,2)$, $\lambda = (1,1,3,1,1,2)$, $\delta = (1,1,0,1,1,0)$ et la densité restreinte à $\Delta^{\lambda,\delta}$ est :

$$\begin{aligned} g^{\lambda,\delta}(\tau_1,\tau_2,x_3,x_3,x_3,\tau_6,\tau_7,x_6,x_6) = (&-\partial_{38}S_{125436798} + \partial_{39}S_{125436789} + \partial_{48}S_{124536789} \\ &+ \partial_{48}S_{123546798} - \partial_{49}S_{124536789} - \partial_{58}S_{123456798} - \partial_{49}S_{123546798} \\ &+ \partial_{59}S_{123456789})(\tau_1,\tau_2,x_3,x_3,x_3,\tau_6,\tau_7,x_6,x_6). \end{aligned}$$

3. Application au modèle de Cox–Dirichlet

Afin d'effectuer le passage des suites croissantes aux suites quelconques nous introduisons $\Delta_\sigma^{\lambda,\delta}$ qui est l'ensemble des suites $(t_1,\ldots,t_n)$ telles que

(i) (t_{σ_j}) est une suite croissante,
(ii) pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ $t_{\sigma_{n_{j-1}+1}} = \cdots = t_{\sigma_{n_j}}$,
(iii) pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant l-1)$ tel que $(\delta_j, \delta_{j+1}) \neq (1,1)$ $t_{\sigma_{n_j}} < t_{\sigma_{n_j+1}}$,
(iv) pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ et tout i $(n_{j-1} < i \leqslant n_j)$
si $\delta_j = 0$ alors $t_{\sigma_i} < \tau_{\sigma_i}$,
si $\delta_j = 1$ alors $t_{\sigma_i} = \tau_{\sigma_i}$.

Ici μ est la loi prédictive dans le modèle de Cox–Dirichlet de fonction de survie S donnée par la formule (1). L'application de la formule (2) du Théorème 2.1 nécessite d'expliciter les termes $\partial_{s(a)}S_{\sigma(a)}$, ce qui après calculs conduit au résultat suivant.

Théorème 3.1. *Soit* μ *la loi prédictive de* n *durées de survie dans le modèle de Cox–Dirichlet censuré, à droite, par les constantes* $\tau_1,\ldots,\tau_n$, *avec la suite de contraintes* $c = (c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et l'a priori de Dirichlet défini par la mesure* α^*, *de fonction de survie* α, *qui est continûment dérivable sur* $\mathbb{R}_+$. *Soit* $\lambda = (\lambda_j)_{1\leqslant j\leqslant l}$ *une suite de regroupements* (*pour la suite croissante* t_{σ_j}) *et* $\delta = (\delta_j)_{1\leqslant j\leqslant l}$ *une suite d'indicateurs de censure compatible avec* λ ; *soit* $b = \sum_{j=1}^{l} \delta_j$. *Nous décomposons, selon* λ, *la suite de contraintes* c *en* l *sous suites successives* (c_υ^j) ; *nous introduisons les sommes partielles supérieures de contraintes* $e_j = \sum_{h=j}^{l}\sum_{\nu=1}^{\lambda_h} c_\nu^h$.

Alors la restriction de μ *à l'ensemble* (*supposé non vide*) $\Delta_\sigma^{\lambda,\delta}$ *admet pour densité, par rapport à la mesure de Lebesgue, la fonction* :

$$g_\sigma^{\lambda,\delta}(t_1,\ldots,t_n) = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha(0))}{\Gamma(\alpha(o)+d)} \prod_{j=1}^{l} B_j(x_j) \prod_{j=1}^{k} C_j(x_{p_j})$$

où

- x_j *est la valeur commune des observations* t_i *appartenant au* $j^{\text{ième}}$ *bloc d'ex æquo une fois rangées en ordre croissant,*

- $k = l - b$,
- $B_j(x_j) = \frac{\Gamma(\alpha(x_j)+e_j)}{\Gamma(\alpha(x_j)+e_{j+1})}$,
- $\mathcal{P}_{\lambda_j-1}$ *désignant l'ensemble de tous les sous ensembles de* $\{1, \ldots, \lambda_j - 1\}$ *et* p_j *étant le* $j^{\text{ième}}$ *indice* m *tel que* $\delta_m = 0$,

$$C_j(x_{p_j}) = \alpha'(x_{p_j}) \sum_{M \in \mathcal{P}_{\lambda_{p_j}-1}} (-1)^{\operatorname{Card} M} \left[(\ln\Gamma)' \left(\alpha(x_{p_j}) + e_{p_j+1} + c^{p_j}_{\lambda_{p_j}} + \sum_{\nu \in M} c^{p_j}_\nu \right) - (\ln\Gamma)' \left(\alpha(x_{p_j}) + e_{p_j+1} + \sum_{\nu \in M} c^{p_j}_\nu \right) \right].$$

Remarquons que le passage des suites croissantes (sur $\Delta^{\lambda,\delta}$) aux suites quelconques (sur $\Delta^{\lambda,\delta}_\sigma$) se fait en appliquant le Théorème 2.1 à la fonction de survie : $(t_1, \ldots, t_n) \to S(t_{(\sigma^{-1})_1}, \ldots, t_{(\sigma^{-1})_n})$.

Références

[1] T.S. Ferguson, A Bayesian analysis of some nonparametric problems, Ann. Statist. 1 (1973) 209–230.

[2] N. Gouget, Statistique semi-paramétrique bayésienne de durées de vie. Résultats théoriques et mise en oeuvre en fiabilité industrielle, Thèse, Université de Marne la Vallée, Champs-sur-Marne, France, 1999.

[3] N. Gouget, J.P. Raoult, Computation of predictive densities in the semi-parametric Bayesian Cox–Dirichlet model, Non Parametric Statistics 10 (1999) 307–341.

[4] J.P. Klein, M.L. Moeschberger, Survival Analysis. Techniques for Censored and Truncated Data, Springer, Berlin, 1997.

[5] F. Messaci, Mesures prédictives dans le modèle de Cox–Dirichlet à censures aléatoires, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 557–560.

[6] F. Messaci, Modèles de statistique semi-paramétrique en fiabilité, Thèse, Université Mentouri (Constantine), Algérie, 2003.

[7] F. Messaci, J.P. Raoult, Calcul de densités prédictives dans le modèle de Cox–Dirichlet à censures fixes, Prépublication de l'Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées de l'université de Marne-la-Vallée, 15, France, 2002.

[8] M. Ruggiero, Bayesian semiparametric estimation of proportional hazard model, J. Econometrics 62 (1994) 272–300.