Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 119–122

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Topologie/Algèbre

Un théorème d'annulation en cohomologie de MacLane

Gerald Gaudens [a], Lionel Schwartz [b]

[a] *Mathematisches Institut, Universität Bonn, Beringstraße 1, 53115 Bonn, Allemagne*
[b] *Laboratoire analyse, géométrie et applications, université Paris 13, 99, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France*

Reçu le 16 février 2005 ; accepté après révision le 31 mai 2005

Disponible sur Internet le 11 juillet 2005

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Le but de cette Note est de donner un résultat d'annulation en cohomologie de MacLane généralisant celui donné dans l'appendice de Powell [G. Powell, The Artinian conjecture for $I \otimes I$, J. Pure Appl. Algebra 128 (1998) 291–310] par le second auteur. Notons $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs depuis la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{F}_2$ vers celle de tous les $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels. Soit F un foncteur polynomial tel que $F\{0\} = \{0\}$, et soient K et L deux foncteurs en algèbres de Boole, F, K, L prenant des valeurs de dimension finie. Alors on a

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(K, L \otimes F) = \{0\}.$$

Pour citer cet article : G. Gaudens, L. Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

Abstract

A vanishing theorem in MacLane cohomology. The aim of this Note is to give a vanishing theorem in MacLane cohomology that generalizes a theorem of the second author in the appendix of Powell [G. Powell, The Artinian conjecture for $I \otimes I$, J. Pure Appl. Algebra 128 (1998) 291–310]. Let $\mathcal{F}$ be the category of functors from the category of finite dimensional vector spaces over $\mathbf{F}_2$ to the one of all $\mathbf{F}_2$-vector spaces. Let F be a polynomial functor such that $F\{0\} = \{0\}$, and let K and L be functors taking values in Boolean algebras, F, K, L taking finite dimensional values. Then

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(K, L \otimes F) = \{0\}.$$

To cite this article: G. Gaudens, L. Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).

Adresses e-mail : gaudens@math.uni-bonn.de (G. Gaudens), schwartz@math.univ-paris13.fr (L. Schwartz).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.008

1. Introduction

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs depuis la catégorie $\mathcal{V}_f$ des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{F}_2$ vers celle de tous les $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels, on supposera dans toute cette note que les foncteurs considérés prennent des valeurs de dimension finie. Soit I le foncteur qui à un espace vectoriel V associe l'ensemble des fonctions de V^* vers $\mathbf{F}_2$, on le notera aussi $V \mapsto \mathbf{F}_2^{V^*}$. On démontre dans cette note une généralisation de l'énoncé suivant du second auteur, établi dans l'appendice à [5] :

Théorème 1.1. *Soit F un foncteur polynomial de partie constante triviale. Alors* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(I^{\otimes n}, F) = \{0\}$.

La démonstration de ce résultat est faite pour $n = 1$ dans [5], le cas n quelconque peut s'en déduire. Il est fait ci-dessous en évitant les arguments faisant appels aux bi-foncteurs. Dans l'énoncé ci dessous un foncteur en algèbre de Boole désigne un foncteur, depuis $\mathcal{V}_f$, vers les algèbres de Boole, composé avec le foncteur oubli vers $\mathcal{F}$. Voici le résultat de la Note :

Théorème 1.2. *Soit F un foncteur polynomial de partie constante nulle, i.e. tel que $F\{0\} = \{0\}$, soient K et L deux foncteurs en algèbres de Boole, supposons de plus que les foncteurs F, K et L prennent des valeurs de dimension finie. Alors* : $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(K, L \otimes F) = \{0\}$.

Soit E un 2-groupe abélien élémentaire, soit $I_E \in \mathcal{F}$ qui à V associe l'espace des toutes les applications de $\mathrm{Hom}(V, E)$ dans $\mathbf{F}_2$. Les foncteurs I_E sont des objets injectifs de $\mathcal{F}$ car le lemme de Yoneda montre que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(F, I_E) \cong F(E)^*$. De plus on observera que si $\dim(E) = d$ on a $I_E \cong I^{\otimes d}$. Dans la Section 3 on démontre le résultat pour les foncteurs en algèbres de Boole engendrés en dimension finie [1]. On utilise une construction de Powell [6]. Le théorème a lieu initialement pour ce que nous appellerons des foncteurs de Powell W qui sont des briques élémentaires des foncteurs I_E. Ils sont déterminés par la théorie de représentation des groupes linéaires GL_n agissant sur $(\mathbf{Z}/2)^n$. La Section 4 traite du cas général et utilise les propriétés des résolutions des foncteurs polynomiaux. La dernière section donne des généralisations. Rappelons pour terminer cette introduction que l'on dit qu'un foncteur F est polynomial si il existe un entier k tel que $\Delta^k(F) = 0$, où $\Delta(F)(V) = \ker F(V \oplus \mathbf{F}_2) \to F(V)$, par exemple $V \mapsto V^{\otimes n}$ est polynomial, I ne l'est pas.

2. Démonstration du Théorème 1.1

On considère le complexe bar non normalisé ([8] Chapitre 8) $B^\bullet(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2[V^*], \mathbf{F}_2)$. La structure de module de $\mathbf{F}_2[V^*]$-module de $\mathbf{F}_2$ est donnée par l'augmentation. Puis on introduit son dual $\mathcal{I}^\bullet$. On a donc $\mathcal{I}^n = I^{\otimes n}(V)$. La cohomologie de ce complexe est donnée par :

Lemme 2.1.

$$H^n(\mathcal{I}^\bullet) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{F}_2[V^*]}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2) \cong S^n(V)$$

où S^n désigne le n-iéme foncteur puissance symétrique. On notera que $\mathbf{F}_2[V^*]^* \cong I(V)$. Si on considère le produit tensoriel de $\mathcal{I}^\bullet$ n fois par lui même, la formule de Künneth, permet d'étendre ce résultat. Considérons maintenant le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, \mathcal{I}^\bullet)$, comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, I^{\otimes n}) \cong I_E(\mathbf{F}_2^{\oplus n})^* \cong \left(I_E(\mathbf{F}_2)^{\otimes n}\right)^*$$

ce complexe s'identifie au dual du complexe bar non normalisé $B^\bullet(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2^E, \mathbf{F}_2)$ dont la sur cohomologie est $\mathrm{Tor}^*_{\mathbf{F}_2^E}(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2)$. Tous les modules l'algèbre de Boole $\mathbf{F}_2^E$ étant projectifs la cohomologie de ce complexe est concentrée en degré 0. En utilisant la formule de Kunneth on en déduit que le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, (\mathcal{I}^{\otimes n})^\bullet)$ a la même propriété.

Le foncteur I s'écrit naturellement comme somme directe du foncteur constant $\mathbf{F}_2$ et du foncteur $\bar{I}$ constitué par les fonctions prenant la valeur 0 sur l'homomorphisme trivial. Soit alors $\mathcal{J}^\bullet$ le complexe tel que $\mathcal{J}^p \cong \mathcal{I}^{p+1}$ si $p > 0$, et $\mathcal{J}^0 \cong \bar{I}$, on a $H^p(\mathcal{J}^\bullet) \cong S^{p+1}$ et plus généralement $H^p((\mathcal{J}^{\otimes n})^\bullet) \cong \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=p+n} S^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes S^{i_n}$.

De ce qui a été dit plus haut on déduit que le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, \mathcal{J}^\bullet)$ est acyclique. Il en est de même pour $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, (\mathcal{J}^{\otimes n})^\bullet)$, on montre, utilisant le fait que les termes $\mathcal{J}^\bullet$ sont de la forme I_E, que ce complexe est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, (\mathcal{J})^\bullet)^{\otimes n}$ et on utilise la formule de Kunneth.

Soit $\mathcal{J}^{\bullet,\bullet}$ (resp. $(\mathcal{J}^{\otimes n})^{\bullet,\bullet}$) une résolution de Cartan–Eilenberg de $\mathcal{J}^\bullet$ (resp. de $(\mathcal{J}^{\otimes n})^\bullet$). On leur applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, -)$, et on considère les suites spectrales d'hypercohomologie associées. La première suite spectrale (associée à la filtration horizontale) est triviale, car la cohomologie de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, (\mathcal{J}^{\otimes n})^\bullet)$ est triviale et les termes du complexe $(\mathcal{J}^{\otimes n})^\bullet$ sont injectifs.

La seconde associée à la filtration verticale à pour terme $E_2^{p,q}$ le groupe $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{F}}(I_E, \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=p+n} S^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes S^{i_n})$ les différentielles d_r sont de bidegré $(1-r, r)$. Comme elle converge vers $\{0\}$ on en déduit, par un argument de degré que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, (S^1)^{\otimes n}) \cong \{0\}$, $n > 0$. Mais tout foncteur simple est sous-foncteur de $(S^1)^{\otimes n}$ pour un certain entier n [3,7,2] on en déduit pour tout foncteur F ayant une série de Jordan–Hölder finie, et de partie constante nulle, que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I_E, F) \cong \{0\}$. Les suites spectrales précédentes montrent alors que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}}(I_E, (S^1)^{\otimes n}) \cong \{0\}$ pour tout $n > 0$, le théorème suit par une récurrence évidente.

3. Démonstration du Théorème 1.2 pour les foncteurs engendrés en dimension finie

On dit que le foncteur K est engendré en dimension d si le plus grand quotient L de K tel que $K(\mathbf{F}_2^{\oplus d}) = L(\mathbf{F}_2^{\oplus d})$ est K lui même. On dira qu'un foncteur est en algèbre de Boole si il prend valeurs dans la catégorie des algèbres de Boole, en particulier I_E est dans ce cas.

Théorème 3.1. *Soit K un foncteur en algèbre de Boole engendré en dimension finie et soit F un foncteur polynomial de partie constante triviale. Alors* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(K, F) = \{0\}$.

Les foncteurs en algèbre de Boole engendrés en dimension finie, et en particulier I_E, admettent une bonne filtration finie définie par Powell. Celle ci a pour sous-quotients des « co-Weyl functors », on les appellera ici foncteurs de Powell. Ils sont indexés par les représentations simples des groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_2)$, donc par les partitions 2-régulières des entiers n. Soit $\bar{I}_n$ est le plus grand sous-foncteur de $I_{(\mathbf{Z}/2)^n}$ nul sur des espaces de dimension inférieure strictement à n ; $\bar{I}_n(V)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions sur l'ensemble des surjections linéaires de V sur E. La dépendance fonctorielle en V est décrite comme suit : soit $\varphi \in \bar{I}_n(V)$ et $f : V \to W$ et α une surjection de W sur E, alors $f_*(\varphi)(\alpha) = \varphi(\alpha \circ f)$ si $\alpha \circ f$ est une surjection, $f_*(\varphi)(\alpha) = 0$ sinon. Ce foncteur hérite, de $I_{(\mathbf{Z}/2)^n}$, d'une action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_2)$. Si ϱ est une représentation simple de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_2)$ le facteur de Powell associé W_ϱ est donné par $V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_2)}(\varrho, \bar{I}_n(V))$.

Le facteur W_ϱ est donc un sous-objet de $\bar{I}_n$. En fait il en est aussi un quotient. Cela provient des remarques suivantes. D'abord pour tout espace vectoriel V le $\mathbf{F}_2[\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_2)]$-module $\bar{I}_n(V)$ est somme directe de copies de la représentation régulière qui est injective comme $\mathbf{F}_2[\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_2)]$-module. Il s'ensuit qu'une suite exacte de $\mathbf{F}_2[\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_2)]$-modules induit par application du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_2)}(-, \bar{I}_n(V))$ une suite exacte de foncteurs. La série de Jordan–Hölder de la représentation régulière $\mathbf{F}_2[\mathrm{GL}_n \mathbf{F}_2]$ induit alors une « série de composition » analogue sur $\bar{I}_n$. Comme la représentation ϱ est à la fois sous-module et quotient de $\mathbf{F}_2[\mathrm{GL}_n \mathbf{F}_2]$ le résultat suit. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(-, F)$ étant exact à droite on en déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(W, F)$ est trivial pour tout facteur de Powell W et tout foncteur polynômial sans partie constante. En utilisant le Théorème 1 et un argument de suite exacte longue élémentaire on étend ce résultat à tous les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{F}}(W, F)$ par une récurrence sur n. Comme tout foncteur en algèbre de Boole engendré en dimension finie admet une filtration finie dont les sous-quotients sont des facteurs de Powell [6] on obtient le Théorème 4.1 (on comparera avec [6]).

4. Le cas général du Théorème 1.2

Voici l'énoncé dans sa forme la plus générale :

Théorème 4.1. *Pour tous foncteurs en algèbre de Boole K et L, et tout foncteur polynômial F de partie constante nulle on a* : $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(K, L \otimes F) = \{0\}$.

On va le démontrer pour $L = \mathbf{F}_2$. Le résultat est conséquence de la description faite dans [1] des foncteurs en algèbre de Boole. Tout foncteur en algèbre de Boole est limite inverse canonique de foncteurs en algèbre de Boole engendré en dimension finie. En fait, pour tout foncteur en algèbre de Boole K, il existe un unique foncteur en algèbre de Boole engendré en dimension d, K_d, telle que tout morphisme de K dans un foncteur en algèbre de Boole (morphisme respectant les structures d'algèbre de Boole) engendré en dimension au plus d factorise de manière unique à travers K_d. Le foncteur K est limite inverse des foncteurs K_d, l'hypothèse de finitude faire au départ nous permet d'oublier les structures profinies de [1]. Soit maintenant une résolution injective, dans $\mathcal{F}$, de F. Le Théorème 2.7 de [4] montre que l'on peut supposer que chaque terme de cette résolution est somme directe finie de copies de foncteurs I_E. Un morphisme dans $\mathcal{F}$, de K dans I_E est, d'après le lemme de Yoneda, somme de morphismes de foncteurs en algèbres de Boole. Soit d la dimension maximum de E parmi les facteurs I_E apparaissant dans la résolution de M jusqu'au n-ième terme. A cause de la propriété universelle de K_d dès que $i < n$ on a : $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(K, F) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(K_d, F)$. On est ramené au cas où le foncteur K est engendré en dimension finie, le théorème suit. Le passage à L quelconque commence par le cas de $L = I_E$, puis par celui des foncteurs de Powell.

5. Compléments

On peut supprimer pour K l'hypothèse que les valeurs prises sont de dimension finie, au prix d'un argument de suite exacte à la Milnor. Enfin on indique un type de résultat analogue, soit F et G des foncteurs polynomiaux de partie constante nulle, prenant des valeurs de dimension finie. Alors on a $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}((\bar{I})^{\otimes d} \otimes F, G) = \{0\}$. On obtient ce résultat par utilisation des n-foncteurs ou du théorème d'Eilenberg–Zilber. De plus on peut remplacer $(\bar{I})^{\otimes d}$ par un foncteur de Powell non constant.

Remerciements

Ce travail a été partiellement soutenu par le réseau INTAS 03-51-3251.

Références

[1] H.-W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, The categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects, Amer. J. Math. 115 (5) (1993) 1053–1106.
[2] N. Kuhn, Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra: II, K-Theory 8 (1994) 395–426.
[3] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1979.
[4] T. Pirashvili, Functor Homology, Panoramas et Synthèses, vol. 16, Soc. Math. France, 2003.
[5] G. Powell, The Artinian conjecture for $I \otimes I$, J. Pure Appl. Algebra 128 (1998) 291–310.
[6] G. Powell, The structure of indecomposable injectives in generic representation theory, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998) 4167–4193.
[7] L. Schwartz, Unstable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
[8] C. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.