Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 85–88
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations différentielles

Analyse des singularités de quelques systèmes intégrables

Ahmed Lesfari

Département de mathématiques, faculté des sciences, université Chouaïb Doukkali, B.P. 20, El-Jadida, Maroc

Reçu le 1er mars 2005 ; accepté après révision le 31 mai 2005

Disponible sur Internet le 29 juin 2005

Présenté par Bernard Malgrange

Cette Note est dédiée au Professeur Pierre van Moerbeke à l'occasion de son 60ème anniversaire

Résumé

Dans cette Note, nous construisons un nouveau système intégrable de cinq variables ayant trois invariants quartiques. Ce système est algébriquement complètement intégrable. ***Pour citer cet article : A. Lesfari, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

A singularity analysis of some integrable systems. In this Note, we construct a new integrable system in five unknowns having three quartics invariants. This system is algebraically completely integrable. ***To cite this article: A. Lesfari, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Considérons le système

$$\ddot{q}_1 - q_1(q_1^2 + 3q_2^2) = 0, \qquad \ddot{q}_2 - q_2(3q_1^2 + 8q_2^2) = 0, \tag{1}$$

correspondant au hamiltonien

$$H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{3}{2}q_1^2q_2^2 - \frac{1}{4}q_1^4 - 2q_2^4. \tag{2}$$

Ce système a été obtenu par Ramani, Dorizzi et Grammaticos [4] et il est intégrable au sens de Liouville, la seconde intégrale première (de degré 8) étant

$$H_2 = p_1^4 - 6q_1^2q_2^2p_1^2 + q_1^4q_2^4 - q_1^4p_1^2 + q_1^6q_2^2 + 4q_1^3q_2p_1p_2 - q_1^4p_2^2 + \frac{1}{4}q_1^8. \tag{3}$$

Adresses e-mail : Lesfari@ucd.ac.ma, Lesfariahmed@yahoo.fr (A. Lesfari).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.006

Les intégrales premières H_1 et H_2 sont bien en involution, i.e., $\{H_1, H_2\} = \sum_{k=1}^{2}(\frac{\partial H_1}{\partial p_k}\frac{\partial H_2}{\partial q_k} - \frac{\partial H_1}{\partial q_k}\frac{\partial H_2}{\partial p_k}) = 0$. Le système (1) admet deux familles de solutions de Laurent

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) = (t^{-1/2}, t^{-1}, t^{-3/2}, t^{-2}) \times \text{série de puissances en } t,$$

dépendant de trois paramètres libres u, v, w et où les exposants sont des fractions. Soit A la variété invariante, i.e.,

$$A = \{x\colon\ H_1 = b_1,\ H_2 = b_2\}, \tag{4}$$

où b_1 et b_2 sont des constantes génériques. En substituant ces développements dans les équations définissant cette variété, on obtient deux relations polynomiales entre u, v et w. Le paramètre w s'élimine de façon linéaire et on obtient une courbe Γ de genre 16 :

$$\begin{aligned}\Gamma:\ &\frac{65}{4}uv^3 + \frac{93}{64}u^6v^2 + \frac{3}{8192}(-9829u^8 + 26112b_1)u^3v \\ &- \frac{10299}{65536}u^{16} - \frac{123}{256}b_1u^8 + b_2 + \frac{1536298731}{52} = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Les solutions de Laurent du système (1) sont donc paramètrées par deux copies Γ_1 et Γ_{-1} d'une même courbe Γ de genre 16.

Théorème 1. *Le système* (1) *se prolonge en un système* (7) *de cinq équations différentielles algébriquement complètement intégrable ayant trois intégrales premières quartiques* (8)*. Génériquement, la variété invariante* B(11) *définie par l'intersection de ces quartiques forme la partie affine d'une surface abélienne* $\widetilde{B}$*. Le diviseur réduit à l'infini* $\widetilde{B} \setminus B = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$ *est très ample et a deux composantes* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_{-1}$*, d'une même courbe* $\mathcal{C}$(10) *de genre* 7*. Les seize fonctions de l'espace* $L^{(4)}$(12) *plongent ces courbes dans un hyperplan de* $\mathbb{P}^{15}$ *et ces dernières ont deux points en commun en lequel* $\mathcal{C}_1$ *est tangente à* $\mathcal{C}_{-1}$*. Le système* (1) *est « généralement » algébriquement complètement intégrable. La surface invariante* A(4) *se complète en un revêtement cyclique double* $\bar{A}$ *de la surface abélienne* $\widetilde{B}$*, ramifié le long du diviseur* $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$*. En outre,* $\bar{A}$ *est lisse sauf aux points doubles d'intersection des courbes* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_{-1}$ *; il s'agit de points singuliers du type* A_3*. L'équation analytique locale autour de ces singularités est :* $x^4 + y^2 + z^2 = 0$*, où* x, y *et* z *sont des coordonnées locales appropriées. La résolution* $\tilde{A}$ *de* $\bar{A}$*, est une surface ayant comme invariants :* $\mathcal{X}(\tilde{A}) = 1$ *et* $p_g(\tilde{A}) = 2$.

Démonstration. Soit $A \to \mathbb{C}^5$, $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, le morphisme défini sur la variété affine A(4) par

$$z_1 = q_1^2, \quad z_2 = q_2, \quad z_3 = p_2, \quad z_4 = q_1p_1, \quad z_5 = p_1^2 - q_1^2q_2^2. \tag{6}$$

En utilisant ces variables et les Éqs. (1), on obtient

$$\begin{aligned}&\dot{z}_1 = 2z_4, \qquad \dot{z}_3 = z_2(3z_1 + 8z_2^2), \\ &\dot{z}_2 = z_3, \qquad \dot{z}_4 = z_1^2 + 4z_1z_2^2 + z_5, \\ &\dot{z}_5 = 2z_1z_4 + 4z_2^2z_4 - 2z_1z_2z_3.\end{aligned} \tag{7}$$

Ce nouveau système sur $\mathbb{C}^5$ admet les trois intégrales premières suivantes :

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{2}z_5 - z_1z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 - \frac{1}{4}z_1^2 - 2z_2^4, \\ F_2 &= z_5^2 - z_1^2z_5 + 4z_1z_2z_3z_4 - z_1^2z_3^2 + \frac{1}{4}z_1^4 - 4z_2^2z_4^2, \\ F_3 &= z_1z_5 + z_1^2z_2^2 - z_4^2.\end{aligned} \tag{8}$$

Il est complètement intégrable et la structure hamiltonienne est définie par le crochet de Poisson :

$$\{F,H\}=\left\langle \frac{\partial F}{\partial z}, J\frac{\partial H}{\partial z}\right\rangle=\sum_{k,l=1}^{5} J_{kl}\frac{\partial F}{\partial z_k}\frac{\partial H}{\partial z_l},$$

où $\frac{\partial H}{\partial z}=(\frac{\partial H}{\partial z_1},\frac{\partial H}{\partial z_2},\frac{\partial H}{\partial z_3},\frac{\partial H}{\partial z_4},\frac{\partial H}{\partial z_5})^\top$, et

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 4z_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4z_1z_2 \\ -2z_1 & 0 & 0 & 0 & 2z_5-8z_1z_2^2 \\ -4z_4 & 0 & 4z_1z_2 & -2z_5+8z_1z_2^2 & 0 \end{bmatrix},$$

une matrice antisymétrique à éléments polynomiaux satisfaisant à l'identité de Jacobi. Le système (7) peut s'écrire sous la forme $\dot z=J\frac{\partial H}{\partial z}$, où $H=F_1$ et $z=(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)^\top$. Les deux intégrales premières F_1 et F_2 sont en involution : $\{F_1,F_2\}=0$, tandis que F_3 est triviale (fonction de Casimir), i.e., $J\frac{\partial F_3}{\partial z}=0$. Le système (7) admet deux familles de solutions de Laurent dépendant de 4 paramètres libres α,β,γ et θ :

$$\begin{aligned}
z_1&=\frac{1}{t}\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2+\beta t-\frac{1}{16}\alpha(\alpha^3+4\beta)t^2+\gamma t^3+\cdots,\\
z_2&=\frac{1}{2t}\varepsilon-\frac{1}{4}\varepsilon\alpha+\frac{1}{8}\varepsilon\alpha^2 t-\frac{1}{32}\varepsilon(-\alpha^3+12\beta)t^2+\theta t^3+\cdots,\\
z_3&=-\frac{1}{2t^2}\varepsilon+\frac{1}{8}\varepsilon\alpha^2-\frac{1}{16}\varepsilon(-\alpha^3+12\beta)t+3\theta t^2+\cdots,\\
z_4&=-\frac{1}{2t^2}\alpha+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{16}\alpha(\alpha^3+4\beta)t+\frac{3}{2}\gamma t^2+\cdots,\\
z_5&=\frac{1}{2t^2}\alpha^2-\frac{1}{4t}(\alpha^3+4\beta)+\frac{1}{4}\alpha(\alpha^3+2\beta)-(\alpha^2\beta-2\gamma+4\varepsilon\theta\alpha)t+\cdots,
\end{aligned}\tag{9}$$

où $\varepsilon=\pm1$. La convergence de ces séries est garantie par la méthode des fonctions majorantes [1]. En substituant ces développements dans les Éqs. (8), on obtient trois relations polynomiales entre α,β,γ et θ. Les paramètres γ et θ s'éliminent de façon linéaire et on obtient une courbe de genre 7 :

$$\mathcal{C}: 64\beta^3-16\alpha^3\beta^2-4(\alpha^6-32\alpha^2c_1-16c_3)\beta+\alpha(32c_2-32\alpha^4c_1+\alpha^8-16\alpha^2c_3)=0. \tag{10}$$

Les séries de Laurent (9) sont donc paramètrées par deux copies $\mathcal{C}_{\pm1}$, d'une même courbe de genre 7. Le procédé classique qui consiste à plonger de façon naïve la variété affine

$$B=\bigcap_{k=1}^{3}\{z\colon\ F_k(z)=c_k\}\subset\mathbb{C}^5, \tag{11}$$

où c_k n'est pas une valeur critique, dans l'espace projectif $\mathbb{P}^5$ fournit une surface très singulière à l'infini. Donc il y a lieu de plonger B dans un espace de dimension supérieure à l'aide d'un procédé différent (voir [1] ou [2]). La méthode consiste à trouver une base de l'espace des fonctions polynomiales des coordonnées

$$L^{(r)}=\left\{\begin{array}{l} f=f(z_1,\ldots,z_5)\text{ polynômes}\\ \text{de degré}\leqslant r,\ \text{tels que :}\\ f(z(t))=t^{-1}(z^{(0)}+\cdots),\\ \text{avec } z^{(0)}\neq 0 \text{ sur } \mathcal{D} \text{ où}\\ z(t)\text{ est donné par (9)}\end{array}\right\}\Big/[F_k=c_k,\ k=1,2,3],$$

de telle façon que le plongement $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_{-1}$ dans $\mathbb{P}^N$ à l'aide de ces fonctions, satisfasse à la relation : *genre géométrique de* $\mathcal{D}^{(r)}=N_r+2$ et $\mathcal{D}^{(r)}\subset\mathbb{P}^{N_r}$. Un calcul direct montre que $r=4$ et que

$$
\begin{aligned}
L^{(4)} &= \{f_0, \ldots, f_{15}\},\\
&= \{1, z_1, z_2, 2z_5 - z_1^2, z_3 + 2\varepsilon z_2^2, z_4 + \varepsilon z_1 z_2, [f_1, f_2], f_1 A, f_2 A, z_4 B, z_5 B,\\
&\qquad f_5 A, f_1 f_2 B, f_4 f_5 + [f_1, f_4], [f_1, f_3] + 2\varepsilon[f_1, f_6], f_3 - 2z_5 + 4f_4^2\},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

où $[s_j, s_k] = \dot{s}_j s_k - s_j \dot{s}_k$ est le wronskien de s_k et s_j, $A = f_1 + 2\varepsilon f_4$ et $B = f_3 + 2\varepsilon f_6$. En utilisant ces fonctions, on plonge ces courbes dans $\mathbb{P}^{15}$ et on constate qu'elles ont deux points en commun en lesquels $\mathcal{C}_1$ est tangente à $\mathcal{C}_{-1}$ (ces points correspondent aux cas où $\alpha = \infty$ et $\alpha = \beta = 0$). Le diviseur $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}^{(4)}$ ainsi obtenu est de genre 17 et il est très ample. En utilisant la méthode d'Adler–van Moerbeke [1] (voir aussi [2]), on montre que B se complète en une variété abélienne $\widetilde{B}$ par l'adjonction de $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$. La variété $\widetilde{B}$ est munie de deux champs de vecteurs commutant et linéairement indépendants en chaque point. Soient $\mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2$ deux 1-formes holomorphes sur $\widetilde{B}$ correspondant respectivement aux champs de vecteurs X_{F_1} et X_{F_2}. Posons $\zeta = 1/z_2$ et $\xi = z_1/z_2$. En utilisant ces champs de vecteurs et les séries de Laurent (9), on obtient les différentielles :

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \mathrm{d}t_1|_{\mathcal{C}_\varepsilon} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t_2}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial t_2}\,\mathrm{d}\xi\right)\bigg|_{\mathcal{C}_\varepsilon} = \frac{8}{\alpha(-4\beta + \alpha^3)}\,\mathrm{d}\alpha,\\
\omega_2 &= \mathrm{d}t_2|_{\mathcal{C}_\varepsilon} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{-\partial\xi}{\partial t_1}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial t_1}\,\mathrm{d}\xi\right)\bigg|_{\mathcal{C}_\varepsilon} = \frac{2}{(-4\beta + \alpha^3)^2}\,\mathrm{d}\alpha,
\end{aligned}
$$

où $\Delta \equiv \frac{\partial\zeta}{\partial t_1}\frac{\partial\xi}{\partial t_2} - \frac{\partial\zeta}{\partial t_2}\frac{\partial\xi}{\partial t_1}$. En outre, le champ de vecteur X_{F_1} est tangent à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_{-1}$ au point double correspondant à $\alpha = \infty$. L'involution $\sigma : (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \mapsto (z_1, -z_2, z_3, -z_4, z_5)$ sur B agit sur les paramètres libres comme suit, $\sigma : (t, \alpha, \beta, \gamma, \theta) \mapsto (-t, -\alpha, -\beta, -\gamma, \theta)$ et donc $\mathcal{C}_1 = \sigma\mathcal{C}_{-1}$. Géométriquement, celà signifie que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ sont déduite l'une de l'autre par une translation dans la surface abélienne $\widetilde{B}$. Les courbes $\mathcal{C}_{\pm 1}$, jouent un rôle important pour obtenir une compactification de la variété $A(4)$. On peut aisément montrer (d'après une méthode de Piovan [3]) que la variété A se complète comme étant un revêtement cyclique double, noté $\bar{A}$, de la surface abélienne $\widetilde{B}$, ramifié le long du diviseur $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$. C'est ce qui explique pourquoi les solutions de Laurent (notamment q_1) contiennent des fractions du type $t^{1/2}$. Le système (1) est « généralement » algébriquement complètement intégrable. En outre, $\bar{A}$ est lisse sauf aux points doubles d'intersection des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$. Plus précisément, il s'agit de points singuliers du type A_3. L'équation analytique locale autour de ces singularités s'écrit sous la forme : $x^4 + y^2 + z^2 = 0$, où x, y et z sont des coordonnées locales appropriées. Soient $\tilde{A}$ la résolution de $\bar{A}$, $\mathcal{X}(\tilde{A})$ la caractéristique d'Euler de $\tilde{A}$ et $p_g(\tilde{A})$ le genre géométrique de $\tilde{A}$. Alors, $\tilde{A}$ est une surface ayant comme invariants : $\mathcal{X}(\tilde{A}) = 1$ et $p_g(\tilde{A}) = 2$, ce qui achève la démonstration.

Remerciements

Je remercie le Professeur P. Deligne pour ses commentaires éclairants.

Références

[1] M. Adler, P. van Moerbeke, The complex geometry of the Kowalewski–Painlevé analysis, Invent. Math. 7 (1989) 3–51.

[2] A. Lesfari, Abelian surfaces and Kowalewski's top, Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris (4) 21 (1988) 193–223.

[3] L. Piovan, Cyclic coverings of Abelian varieties and the Goryachev–Chaplygin top, Math. Ann. 294 (1992) 755–764.

[4] A. Ramani, B. Dorozzi, B. Grammaticos, Painlevé conjecture revisited, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1539–1541.