Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 113–118

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Laplacien hypoelliptique et torsion analytique

Jean-Michel Bismut [a], Gilles Lebeau [b]

[a] *Département de mathématique, université Paris-sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France*
[b] *Département de mathématiques, université de Nice Sophia-Antipolis, parc Valrose, 06108 Nice cedex 02, France*

Reçu le 27 mai 2005 ; accepté le 31 mai 2005

Disponible sur Internet le 1er juillet 2005

Présenté par Jean-Michel Bismut

Résumé

On explicite les propriétés d'analyse du Laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent d'une variété Riemannienne compacte X. On montre qu'il est effectivement une déformation du Laplacien ordinaire sur X. On relie la torsion analytique du Laplacien hypoelliptique à la torsion analytique de Ray–Singer du Laplacien sur X. ***Pour citer cet article : J.-M. Bismut, G. Lebeau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

The hypoelliptic Laplacian and analytic torsion. We establish analytical properties of the hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle of a Riemannian manifold. We show that it is, in the proper sense, a deformation of the classical Laplacian on X. We give a formula relating the analytic torsion of the hypoelliptic Laplacian to the Ray–Singer analytic torsion of the Laplacian of X. ***To cite this article: J.-M. Bismut, G. Lebeau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Dans les Notes [2–4] et dans les articles [5,6], le premier auteur a proposé la construction d'une théorie de Hodge exotique sur le fibré cotangent T^*X d'une variété Riemannienne compacte X. Le Laplacien correspondant dépend d'un paramètre $c \in \mathbf{R}^*$. C'est un opérateur hypoelliptique, autoadjoint relativement à une forme Hermitienne de signature (∞, ∞). De plus on a montré que pour des raisons algébriques, quand $c \to +\infty$, ce Laplacien converge en un sens adéquat vers le Laplacien de X, alors que quand $c \to 0$, il converge vers une modification de l'opérateur de dérivée de Lie associé au générateur du flot géodésique sur T^*X.

Une motivation pour une telle construction, qui est explicitée dans les références données ci-dessus, est une tentative infructueuse de construire une déformation de Witten [16] pour la théorie de Hodge de LX qui soit

Adresses e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut), lebeau@math.unice.fr (G. Lebeau).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.06.003

associée à la fonctionnelle d'énergie E sur LX (dont les points critiques sont précisément les géodésiques fermées de X). Les difficultés d'analyse dans la construction d'une telle théorie sont en effet très nombreuses. Le Laplacien hypoelliptique sur T^*X apparaît comme une version semiclassique de la déformation de Witten sur LX, la propriété d'interpolation décrite précédemment étant l'ombre semiclassique des propriétés bien connues du Laplacien de Witten.

Dans cette Note, on annonce les résultats obtenus dans l'article [8], relatifs aux propriétés analytiques du Laplacien hypoelliptique. Nous montrons des estimations hypoelliptiques globales sur ce Laplacien, et nous vérifions qu'effectivement, quand $c \to +\infty$, ce Laplacien converge en un sens très précis vers le Laplacien de X. On construit une métrique de Ray–Singer hypoelliptique sur le déterminant de la cohomologie d'un fibré complexe plat hermitien sur X, qu'on compare à la métrique de Ray–Singer ordinaire [15,10] qui est construite à l'aide du Laplacien elliptique sur X.

Pour cela, on raffine les estimations hypoelliptiques de Hörmander [13] pour tenir compte de la non compacité de T^*X. Pour démontrer le résultat de convergence, on exprime la résolvante de notre opérateur à l'aide d'une paramétrix sur l'espace total de T^*X dont la « projection » sur X converge vers la paramétrix correspondante sur X. Pour démontrer les résultats sur la torsion analytique, on développe en particulier une théorie de l'indice local hypoelliptique.

La théorie de [6] est formulée également en situation relative. Les résultats de [8] s'étendent à cette situation. Pour la commodité du lecteur, nous ne formulons nos résultats que dans le cadre d'une seule variété X.

2. Le Laplacien hypoelliptique

Soit X une variété Riemannienne compacte de dimension n, et soit T^*X son fibré cotangent. Soit (F, ∇^F, g^F) un fibré plat hermitien sur S. On pose

$$\omega\big(\nabla^F, g^F\big) = \big(g^F\big)^{-1} \nabla^F g^F. \tag{1}$$

Dans [2,3,6], pour $c \in \mathbf{R}^*$, on a construit un Laplacien exotique $\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ agissant sur le complexe de de Rham $(\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F), d^{T^*X})$. Nous renvoyons à ces références pour les détails de la construction. Disons juste ici que $\mathcal{H}(x,p) = |p|^2/2$, et que $\mathcal{H}^c = c\mathcal{H}$. Comme le Laplacien usuel, $A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ est l'anticommutateur de d^{T^*X} avec un « adjoint », qui n'est plus un adjoint relativement à un produit Hermitien. Dans [6], on introduit également un opérateur $\mathfrak{A}'^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ qui est conjugué à $A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$.

Soit ∇^{TX} la connexion de Levi-Civita sur TX et soit R^{TX} sa courbure. On a le scindage $TT^*X = TX \oplus T^*X$ induit par la connexion ∇^{TX}, et on a aussi l'identification correspondante $\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X) = \Lambda^{\cdot}(T^*X) \widehat{\otimes} \Lambda^{\cdot}(TX)$. Rappelons que T^*X est une variété symplectique. Soit $Y^{\mathcal{H}^c}$ le champ de vecteurs hamiltonien sur T^*X de Hamiltonien $\mathcal{H}^c$. Quand $c = 1$, ce champ de vecteurs définit le flot géodésique sur T^*X.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormale de TX, et soit $e^1, \ldots, e^n$ la base duale correspondante de T^*X. On désigne par $\hat{e}_1, \ldots, e_n$ et $\hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n$ d'autres copies de ces bases. Alors $e_1, \ldots, e_n, \hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n$ est une base de TT^*X, et $e^1, \ldots, e^n, \hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$ est la base duale de T^*T^*X.

On a alors l'identité de [3, Théorème 3.1] et [6, Théorème 3.4].

Théorème 2.1. *Pour $c \in \mathbf{R}^*$, on a l'identité,*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}'^2_{\phi,\mathcal{H}^c} = \frac{1}{4}\bigg(& -\Delta^V + c^2|p|^2 + c(2\hat{e}_i i_{\hat{e}^i} - n) - \frac{1}{2}\big\langle R^{TX}(e_i, e_j)e_k, e_l\big\rangle (e^i - \hat{e}_i)(e^j - \hat{e}_j) i_{e_k + \hat{e}^k} i_{e_\ell + \hat{e}^l} \bigg) \\
& - \frac{1}{2}\bigg(\nabla^{\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)\widehat{\otimes} F, u}_{Y^{\mathcal{H}^c}} + \bigg(c\big\langle R^{TX}(p, e_i)p, e_j\big\rangle + \frac{1}{2}\nabla^F_{e_i}\omega\big(\nabla^F, g^F\big)(e_j)\bigg)(e^i - \hat{e}_i) i_{e_j + \hat{e}^j} \\
& + \frac{1}{2}\omega\big(\nabla^F, g^F\big)(e_i)\nabla_{\hat{e}^i}\bigg).
\end{aligned} \tag{2}$$

Dans la suite, on supposera pour simplifier $c > 0$, avec $c = 1/b^2$, $b > 0$. Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des sections de $\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)\widehat{\otimes}\pi^*F$ qui sont de carré intégrable sur T^*X. On pose

$$\begin{aligned}
\alpha_+ &= \frac{1}{2}\big(-\Delta^V + |p|^2 + (2\hat{e}_i i_{\hat{e}^i} - n)\big),\\
\beta_+ &= -\left(\nabla^{\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)\widehat{\otimes}F,u}_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2}\omega\big(\nabla^F, g^F\big)(e_i)\nabla_{\hat{e}^i}\right),\\
\gamma_+ &= -\frac{1}{4}\big\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k, e_\ell\big\rangle(e^i - \hat{e}_i)(e^j - \hat{e}_j)i_{e_k+\hat{e}^k}i_{e_\ell+\hat{e}^\ell}\\
&\quad - \left(\big\langle R^{TX}(p,e_i)p, e_j\big\rangle + \frac{1}{2}\nabla^F_{e_i}\omega\big(\nabla^F, g^F\big)(e_j)\right)(e^i - \hat{e}_i)i_{e_j+\hat{e}^j}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Soit $K_b : \Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F) \to \Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)$ l'application $s(x,p) \to s(x,bp)$. On pose,

$$L_c = K_b 2\mathfrak{A}'^2_{\phi,\mathcal{H}^c}K_{1/b}. \tag{4}$$

Par [6, Theorem 3.8],

$$L_c = \frac{1}{b^2}\alpha_+ + \frac{1}{b}\beta_+ + \gamma_+. \tag{5}$$

L'opérateur α_+ agit le long de la fibre et est autoadjoint. Fibre à fibre, son noyau est de dimension 1 et est engendré par $\exp(-|p|^2/2)$. Soit P_+ le projecteur orthogonal sur $\ker\alpha_+$. Notons que β_+ envoie $\ker\alpha_+$ dans son orthogonal $\ker\alpha_+^{\perp}$.

Soit $(\Omega^{\cdot}(X,F), d^X)$ le complexe de de Rham de X. Soit $\square^X = (d^X + d^{X*})^2$ le Laplacien agissant sur $\Omega^{\cdot}(X,F)$. On identifie $\Omega^{\cdot}(X,F)$ à son image dans $\Omega^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)$ par l'isométrie $\alpha \to \pi^*s\exp(-|p|^2/2)/\pi^{n/4}$. Soit $\square^X = (d^X + d^{X*})^2$ le Laplacien. Dans [3, Théorème 4.1] et dans [6, Théorèm 3.14], on a démontré le résultat clé suivant.

Théorème 2.2. *On a l'identité,*

$$P_+(\gamma_+ - \beta_+\alpha_+^{-1}\beta_+)P_+ = \frac{1}{2}\square^X. \tag{6}$$

3. La résolvante du Laplacien hypoelliptique

On fixe $b > 0$, et on pose $c = 1/b^2$. Soit $\mathcal{S}^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)$ l'espace des sections C^∞ de $\pi^*(\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)\widehat{\otimes}F)$ qui sont à décroissance rapide. Soit $\|\ \|$ la norme usuelle sur les opérateurs agissant sur $\mathcal{H}$, soit $\|\ \|_1$ la norme des opérateurs à trace agissant sur $\mathcal{H}$.

Théorème 3.1. *Il existe $\lambda_0 > 0$, $c_0 > 0$, $C > 0$ tel que si $U \subset \mathbf{C}$ est donné par*

$$\mathcal{U} = \big\{\lambda = -\lambda_0 + \sigma + \mathrm{i}\tau,\ \sigma,\tau \in \mathbf{R},\ \sigma \leqslant c_0|\tau|^{1/6}\big\}, \tag{7}$$

si $\lambda \in U$, alors la résolvante $(\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} - \lambda)^{-1}$ existe, et de plus,

$$\big\|(\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} - \lambda)^{-1}\big\| \leqslant C. \tag{8}$$

Si $\lambda \in U$, l'opérateur $(\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} - \lambda)^{-1}$est un opérateur compact agissant sur $\mathcal{H}$. Pour $M \in \mathbf{R}_+$, $M > 12n$, $(\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} - \lambda)^{-M}$ est un opérateur à trace, et il existe $C' > 0$ tel que si $\lambda \in \mathcal{U}$,

$$\big\|(\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} - \lambda)^{-M}\big\|_1 \leqslant C'\big(1 + |\lambda|\big)^M. \tag{9}$$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}\,L_c$, soit V_λ le sous-espace caractéristique de $\mathcal{H}$ associé. Alors V_λ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{S}^{\cdot}(T^*X,\pi^*F)$.

Démonstration. Comme dans l'étude des équations de Fokker–Planck par Helffer–Nier [11] et Hérau–Nier [12], on raffine les estimations hypoelliptiques d'Hörmander [13, Chapitre 22, p. 353–359], en utilisant une décomposition de Littlewood–Paley, qui nous permet d'obtenir un contrôle adéquat de la résolvante à l'infini. □

Remarque 1. Du Théorème 3.1, on déduit en particulier les propriétés correspondantes pour le noyau de la chaleur associé à $\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$.

4. Le Laplacien hypoelliptique comme déformation du Laplacien ordinaire

On étudie maintenant le comportement de la résolvante de $\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ quand $b \to 0$. On pose $P_+^\perp = 1 - P_+$. Alors $P_+^\perp$ est le projecteur orthogonal sur $\ker \alpha_+^\perp$. Notons que β_+ envoie $\ker \alpha_+$ dans $\ker \alpha_+^\perp$.

Au moins formellement, par (5), on a l'identité

$$P_+(L_c - \lambda)^{-1} P_+ = P_+\big(\gamma_+ - \lambda - (\beta_+ + b\gamma_+)\big(P_+^\perp(b^2 L_c - b^2\lambda)P_+^\perp\big)^{-1}(\beta_+ + b\gamma_+)\big)P_+. \tag{10}$$

Dans [8], on montre que (10) est vraie. De plus on utilise cette équation pour établir que quand $b \to 0$, la résolvante de $\mathfrak{L}_c$ converge en un sens adéquat vers la résolvante de $\square^X/2$. Nous allons détailler ce point.

On définit en effet dans [8] des réels $c_0, \lambda_1 > 0$. On pose

$$\mathcal{V} = \big\{\lambda \in \mathbf{C},\ \lambda = \mu + \nu,\ \operatorname{Re}\mu \leqslant \lambda_1,\ \nu \in \mathbf{R},\ |\nu| \leqslant c_0|\mu|^{1/6}\big\}. \tag{11}$$

On montre alors dans [8] qu'il existe $b_0 \in]0,1]$ tel que pour $b \in]0, b_0]$, $\lambda \in \mathcal{V}$, la résolvante $S_{h,\lambda} = (b^2 L_c + P_\pm - \lambda)^{-1}$ est bien définie. On montre de plus que l'opérateur à droite de (10) appartient à une classe convenable d'opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques pour $h = b$. Plus précisément on montre que pour des multiindices a, b, c, d, si $R_{a,b,c,d} = P_+ p^a \partial_p^b (P_+^\perp(b^2 L_c - b^2\lambda)P_+^\perp)^{-1} p^c \partial_p^d P_+$, alors $R_{a,b,c,d} \in \mathcal{E}^{-1}_{\delta,h}$. La classe d'opérateurs $\mathcal{E}^{-1}_{\delta,h}$ dont les symboles sont dans $\mathcal{S}^{-1}_{\delta,h}$ est une modification convenable de la classe $S_{2/3,1/3}$ de Hörmander [13].

On peut alors montrer que si $\lambda \in \mathcal{V}$, alors la formule (10) est effectivement vraie. En utilisant les résultats précédemment décrits sur la classe $\mathcal{S}^{-1}_{\delta,h}$, on montre alors que quand $b \to 0$, la résolvante $(L_c - \lambda)^{-1}$ converge vers $P_+(\square^X/2 - \lambda)^{-1}P_+$.

L'étude de la convergence repose sur une étude très précise du symbole principal semiclassique des opérateurs $R_{a,b,c,d}$. Soit en effet $\mathcal{N}$ l'oscillateur harmonique le long des fibres de T^*X. Alors $\mathcal{N}$ est la partie scalaire de l'opérateur α_+. Pour $\xi \in T^*X$, on pose

$$B(\mathrm{i}\xi) = \mathcal{N} - \mathrm{i}\langle p, \xi\rangle. \tag{12}$$

Notons tout de suite qu'on peut décrire $B(\mathrm{i}\xi)$ à l'aide des opérateurs de création et annihilation a, a^* relatifs à la réprésentation spectrale de l'oscillateur harmonique $\mathcal{N}$. On montre alors dans [8] que le symbole principal semiclassique de $R_{a,b,c,d}$ est donné par

$$\sigma_{-1}(R_{a,b,c,d}) = P_+ p^a \partial_p^b \big(P_+^\perp\big(B(\mathrm{i}\xi) - \lambda\big)P_+^\perp\big)^{-1} p^c \partial_p^d P_+. \tag{13}$$

Pour $y \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, on pose $u = y^2 - \lambda$. Soit $J_0(y,\lambda)$ la fonction donnée par

$$J_0(y,\lambda) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{y^{2k}}{u(u+1)\cdot(u+k)}. \tag{14}$$

On a

$$P_+\big(B(\mathrm{i}\xi) - \lambda\big)^{-1} P_+ = J_0\big(|\xi|/\sqrt{2}, \lambda\big). \tag{15}$$

L'étude de la convergence des résolvantes repose en particulier sur une étude fine de la fonction J_0.

5. Torsion analytique hypoelliptique

Aux métriques g^{TX}, g^F, on peut associer une métrique canonique sur la droite $\lambda = \det H^{\cdot}(X, F)$, qu'on appelle métrique de Ray–Singer [15,10]. Cette métrique est obtenue à l'aide de la métrique L_2 obtenue par identification de $H^{\cdot}(X, F)$ à $\ker \square^X$, et de la torsion analytique de Ray et Singer [15], qui est une combinaison de dérivées en 0 de la fonction zeta de $\square^X$ en différents degrés.

Dans le contexte des sections précédentes, pour $b > 0$, $c = 1/b^2$ on peut définir une métrique généralisée de Ray–Singer hypoelliptique $\| \|_{\lambda}^{b,2}$. On définit tout d'abord la torsion analytique hypoelliptique, qui existe grâce aux résultats précédents, et aux propriétés du développement en temps petit du noyau de la chaleur de $\exp(-A^2_{\phi,\mathcal{H}^c})$ sur la diagonale. On utilise les propriétés d'autoadjonction de $A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ relativement à une forme hermitienne explicite [2, Théorème 5.2], [6, Théorème 2.21]. On continue la construction comme indiqué dans [2, Section 2], [6, Section 1]. Insistons sur le fait que la métrique $\| \|_{\lambda}^{b,2}$ n'est plus a priori positive.

Théorème 5.1. *Pour $b > 0$, on a l'identité,*

$$\| \|_{\lambda}^{b,2} = \| \|_{\lambda}^{0,2}. \tag{16}$$

Démonstration. Indiquons brièvement le principe de la preuve. On montre simplement que la métrique généralisée $\| \|_{\lambda}^{b,2}$ ne dépend pas de b, en utilisant la théorie de l'indice local hypoelliptique. On fait ensuite tendre $c \to +\infty$ pour obtenir (16). On exprime la torsion analytique hypoelliptique comme dérivée en 0 d'une transformée de Mellin du noyau de la chaleur. A temps t fixé, on utilise les résultats de convergence de la Section 4. On montre que pour $c > 0$ assez grand, le spectre de $A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ est de partie réelle positive ou nulle, et que les conclusions de la théorie de Hodge ordinaire s'étendent à ce Laplacien. On montre en particulier que les formes harmoniques convergent en un sens adéquat vers les formes harmoniques pour $\square^X$. On étudie également la transition du comportement en temps petit du noyau de la chaleur hypoelliptique vers le noyau de la chaleur elliptique. □

Plus généralement supposons que G soit un groupe de Lie compact agissant isométriquement sur X. On suppose que l'action de G se relève à F et préserve ∇^F, g^F. Alors suivant [1, Sections 1 and 2], on peut définir les versions équivariantes des métriques précédentes, qu'on note de la même manière. Si $g \in G$, on obtient ainsi des fonctions $\log(\| \|_{\lambda}^{0,2})$, $\log(\| \|_{\lambda}^{b,2})$. Nous n'entrons pas ici dans le détail de la construction donnée dans [8]. Disons seulement que ces « métriques » dépendent elles-même de $g \in G$. Soit $\zeta(\theta, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^s}$ la fonction de Lerch [14]. On pose

$$^0J(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial s}(\theta, 0) - \frac{\partial \zeta}{\partial s}(0, 0)\right). \tag{17}$$

Cette fonction a été introduite dans [7, Definition 5.4].

Si $g \in G$, soit X_g la variété des points fixes de g. Soit $e(TX_g)$ la classe d'Euler de TX_g. Soit $^0J_g(TX) \in \mathbf{R}$ la fonction localement constante sur X_g obtenue à partir de la décomposition de $TX|_{X_g}$ à partir des espaces propres de g par sommation sur les différents θ.

On montre alors dans [8] une généralisation du Théorème 5.1.

Théorème 5.2. *Si $g \in G$, $b > 0$, on a l'identité,*

$$\log\left(\frac{\| \|_{\lambda}^{b,2}}{\| \|_{\lambda}^{0,2}}\right)(g) = 2 \int_{X_g} e(TX_g)^0 J_g\big(TX|_{X_g}\big) \operatorname{Tr}^F[g]. \tag{18}$$

Dans [8], on étend le Théorème 5.2 aux formes de torsion analytique de [9]. Le genre associé à la fonction $^0J(\theta, x)$ de [7] apparaît dans la formule de comparaison.

Références

[1] J.-M. Bismut, Equivariant immersions and Quillen metrics, J. Differential Geom. 41 (1) (1995) 53–157.

[2] J.-M. Bismut, Une déformation de la théorie de Hodge sur le fibré cotangent, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 471–476.

[3] J.-M. Bismut, Le Laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 555–559.

[4] J.-M. Bismut, Une déformation en famille du complexe de de Rham–Hodge, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 623–627.

[5] J.-M. Bismut, Le Laplacien hypoelliptique, in : Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2003–2004, Exp. No. XXII, École Polytechnique, Palaiseau, 2004, p. 15.

[6] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle, J. Amer. Math. Soc. 18 (2) (2005) 379–476.

[7] J.-M. Bismut, S. Goette, Equivariant de Rham torsions, Ann. of Math. 159 (2004) 53–216.

[8] J.-M. Bismut, G. Lebeau, The hypoelliptic Laplacian and Ray–Singer metrics (2005), à paraître.

[9] J.-M. Bismut, J. Lott, Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion, J. Amer. Math. Soc. 8 (2) (1995) 291–363.

[10] J.-M. Bismut, W. Zhang, An extension of a theorem by Cheeger and Müller, Astérisque 205 (1992) 235. With an appendix by François Laudenbach.

[11] B. Helffer, F. Nier, Hypoelliptic Estimates and Spectral Theory for Fokker–Planck Operators and Witten Laplacians, Lecture Notes in Math., vol. 1862, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[12] F. Hérau, F. Nier, Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker–Planck equation with a high-degree potential, Arch. Ration. Mech. Anal. 171 (2) (2004) 151–218.

[13] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III. Pseudodifferential operators, Grundlehren Math. Wiss., vol. 274, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[14] M. Lerch, Note sur la fonction $\mathfrak{r}(w,x,s)=\sum_0^\infty \frac{e^{2i\pi kx}}{(w+k)^s}$, Acta Math. 11 (1887–1888) 19–24.

[15] D.B. Ray, I.M. Singer, R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, Adv. Math. 7 (1971) 145–210.

[16] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J. Differential Geom. 17 (4) (1983) 661–692, 1982.