Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 369–374
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique/Probabilités

Vitesse de convergence en norme p-intégrale et normalité asymptotique de l'estimateur crible de l'opérateur d'un ARB(1)

Fatiha Rachedi [a,b]

[a] *Université Aboubekr Belkaïd, département de mathématiques, Tlemcen 13000, Algérie*
[b] *LSTA, université Paris 6, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*

Reçu le 3 décembre 2004 ; accepté après révision le 3 mai 2005

Disponible sur Internet le 2 septembre 2005

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Le modèle autorégressif dans un espace de Banach (ARB) permet de représenter des processus à temps continu (voir, par exemple, D. Bosq, Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications, 2000, Springer, p. 150). Dans cette Note, nous considérons l'estimation, par la méthode des moindres carrés, de l'opérateur d'un ARB(1) dans le cas où cet opérateur est strictement p-intégral, $p \in]1, \infty[$, en utilisant la méthode des cribles de Grenander. Nous montrons la convergence de l'estimateur crible et sa normalité asymptotique. ***Pour citer cet article : F. Rachedi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Rate of convergence for Sieve estimator of the operator in ARB(1) process. The autoregressive model in a Banach space (ARB) allows to represent many continuous time processes used in practice (see, for example, D. Bosq, Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications, 2000, Springer, p. 150). In this Note we study an estimator of the operator in ARB(1) by the least squares method, when the operator is strictly p-integral, $p \in]1, \infty[$, and we use Grenander's method of sieves (From U. Grenander, Abstract Inference, Wiley, 1981). We show consistency of the sieve estimator and we derive a central limit theorem for this estimator. ***To cite this article: F. Rachedi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $(B, \mathcal{B})$ be a separable Banach space equipped with its Borel σ-algebra and $(\varepsilon_n, n \in Z)$ a B-strong white noise. Let ρ an operator of $\mathcal{L}(B)$, the space of bounded linear operators from B to B, such that $\exists j_0 \in \mathbb{N}^*$ for

Adresse e-mail : rachedi@ccr.jussieu.fr (F. Rachedi).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.05.009

which $\|\rho^{j_0}\|_{\mathcal{L}} < 1$. A random process $(X_n, n \in Z)$ defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ is said to be an autoregressive process of order one with values in B, if it satisfies the following relation:

$$X_n = \rho X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \in Z. \tag{1}$$

In this Note we derive almost sure convergence of the sieve estimator of ρ by using properties of spaces L^p. These properties allow us to extend the techniques used in [9] for the case of strictly 2-integral operator to strictly p-integral operator, $p > 1$. ρ is strictly p-integral if and only if there exists a measurable space $(\Gamma, \mathcal{F}, \nu)$, two bounded linear operators a and b from $L^p(\nu)$ to B and from B to $L^\infty(\nu)$ respectively, and an operator of multiplication M_ϕ from $L^\infty(\nu)$ to $L^p(\nu)$ (defined by $\phi \in L^p(\nu)$) such that $\rho = bM_\phi a$ (see ([3] p. 111)).

Let $(e_k^*, e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a Markushevich basis of $L^p(\nu)$ ([8]). To obtain a decomposition of ρ we suppose that $(ae_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is a shrinking basis in B. In this case the operator ρ admits the following decomposition:

$$\rho(\cdot) = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k \big(e_k^*, e_k b(\cdot)\big) a e_k \tag{2}$$

where $\alpha_k = (e_k^*, \phi)$, $\forall k \geqslant 0$. We only consider here the case of known operators a and b, a case which is not too restrictive (see examples in [10]). Thus estimation of ρ passes through estimation of the coefficients $(\alpha_k)_k$ of ϕ. Let us set $\rho_k(\cdot) = (e_k^*, e_k b(\cdot)) a e_k$ $k \geqslant 0$ and $\Theta = \{\rho = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k \rho_k \mid (\alpha_k)_k \in \ell^p\}$. We consider the sieve

$$\Theta_m = \left\{\rho = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k \rho_k \,\middle|\, \alpha_k = 0,\ k > m\right\}, \quad m \geqslant 0,\ m = m(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Let $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ be a sample of the process defined in (1). Denoting by $(f_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ the sequence of functional coefficients of $(ae_k)_{k\in\mathbb{N}}$. The sieve estimator of ρ by least squares method is solution of the following equation:

$$\min_{\rho\in\Theta_m} \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} (f_k^*, X_i - \rho X_{i-1})^2 \right)^{p/2}.$$

In this Note we show the a.s. consistency of the sieve estimator for an empirical norm equivalent to the strictly p-integral norm and we derive a central limit theorem for this estimator.

1. Définitions et notations

Toutes les variables aléatoires considérées dans cette Note sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. $(B, \mathcal{B})$ est un espace de Banach séparable réel muni de sa tribu borélienne et de sa norme $\|\ \|$. Dans toute la suite $p \in]1, \infty[$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(i) *Opérateur strictement p-intégral* : On note $\mathcal{L}(B)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de B dans B. Soit $\rho \in \mathcal{L}(B)$, d'aprés ([3] p. 111) ρ est strictement p-intégral si et seulement s'il existe un espace mesurable $(\Gamma, \mathcal{F}, \nu)$, deux opérateurs linéaires bornés a et b de $L^p(\nu)$ dans B et de B dans $L^\infty(\nu)$ respectivement, et un opérateur de multiplication M_ϕ de $L^\infty(\nu)$ dans $L^p(\nu)$ (défini par $\phi \in L^p(\nu)$) tel que $\rho = bM_\phi a$. On note $\mathcal{J}_p(B)$ l'ensemble des opérateurs strictement p-intégraux, muni de sa norme p-intégrale définie par $\|\rho\|_p = \inf_{a,b,\phi} \|b\|_{\mathcal{L}} \cdot \|M_\phi\|_{L_p} \cdot \|a\|_{\mathcal{L}}$, $\rho \in \mathcal{J}_p(B)$. On a $\|\rho\|_{\mathcal{L}} \leqslant \|\rho\|_p$.

(ii) *Base dans un espace de Banach* Soient $(x_k)_k$ une base dans B et $(y_k^*)_k$ la suite des fonctionnelles de coefficients associée à cette base. Si la suite $(y_k^*)_k$ des fonctionnelles de coefficients forme une base dans B^*, $(x_k)_k$ est dite base de shrinking. En général si B est un espace de Banach tel que B^* admet une base $(y_k^*)_k$, alors B admet une base de shrinking ([7] p. 10, [5]). On note $(\cdot, \cdot)$ le crochet de dualité entre B et B^*. Une suite $(y_k^*)_k$ dans B^* est dite suite basique faible s'il existe une suite $(x_k)_k$ dans B telle que $(y_k^*, x_j) = \delta_{kj}$. Le couple $(y_k^*, x_k)_k$ est dit système biorthogonal, il est dit base de Markushevich dans B si l'espace engendré par $(x_k)_k$, noté $[x_k]_k$, est dense dans B et $[y_k^*]_k$ est faiblement dense dans B^*. En outre tout espace de Banach séparable B admet une base de Markushevich $(y_k^*, x_k)_k$ vérifiant : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\|x\|_k \cdot \|y^*\|_k \leqslant 1 + \varepsilon\ \forall k$, [8].

(iii) *Crible* : Nous notons Θ l'espace des paramètres muni d'une métrique d. Un crible pour l'espace paramétrique Θ est une suite de sous ensembles $\{\Theta_m\}$ de Θ telles que Θ_m est compact, $\Theta_m \subset \Theta_{m+1}$, et $\Theta = \bigcup \Theta_m$ est dense dans Θ [4].

1.1. Le modèle

Un processus autorégressif d'ordre 1 dans un espace de Banach (ARB(1)) est une suite $(X_t,\ t \in \mathbb{Z})$ de variables aléatoires à valeurs dans B telle que :

$$X_t = \rho(X_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

où $\rho \in \mathcal{J}_p(B)$ et vérifie $\|\rho\|^{j_0} < 1$ pour un $j_0 \geqslant 1$, et $\varepsilon = (\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc fort dans B. Par la suite nous notons $\rho(X_{t-1})$ par $\rho X_{t-1},\ t \in \mathbb{Z}$. Le problème est l'estimation de l'opérateur ρ.

Dans cette Note nous montrons la convergence de l'estimateur crible de ρ en utilisant les propriétés des espaces L^p. Ces propriétés nous ont permis de genéraliser les techniques utilisées dans [9] dans le cas d'un opérateur strictement 2-intégral.

Soit P la loi de probabilité de X_0 dans $(B, \mathcal{B})$, d'aprés ([1] p. 149) $X_0 \in L_B^2(P)$. Soit $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ les observations du processus vérifiant (3), on définit les opérateurs de covariance et de covariance croisée de X_0 par $C(x^*) = E((x^*, X_0)X_0)$ et $D(x^*) = E((x^*, X_0)X_1)$ respectivement, $x^* \in B^*$. Les opérateurs de covariance empirique et covariance croisée empirique de X_0 sont :

$$C_n(x^*) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(x^*, X_i)X_i \quad \text{et} \quad D_n(x^*) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(x^*, X_i)X_{i+1} \quad \text{respectivement, } x^* \in B^*.$$

1.2. Hypothèses

(i) Soit $(e_k^*, e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base de Markushevich dans $L^p(\nu)$. Pour obtenir une décomposition de ρ nous supposons que $(ae_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de shrinking dans B. Notons $(f_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctionnelles de coefficients associée à $(ae_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dans ce cas l'opérateur ρ s'écrit :

$$\rho(\cdot) = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k \big(e_k^*, e_k b(\cdot)\big) a e_k \tag{4}$$

où $\alpha_k = (e_k^*, \phi)$, $\forall k \geqslant 0$. Dans certains cas les opérateurs a et b sont connus. Le fait de considérer que a et b sont connus, n'est pas très restrictif (voir exemples dans [10]). Ainsi l'estimation de ρ revient à l'estimation des coefficients $(\alpha_k)_k$ de ϕ.

Soit la suite des opérateurs $\rho_k(\cdot) = (e_k^*, e_k b(\cdot))ae_k$, $k \geqslant 0$, ρ_k est un opérateur de rang 1. Soit $(\alpha_k)_k \in \ell^p$, posons $\rho_N = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \rho_k$, alors ρ_N converge vers $\rho = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k \rho_k$ par rapport à la norme strictement p-intégrale donc linéaire. On pose $\xi_k = (C\rho_k^* f_k^*, \rho_k^* f_k^*)$, $k \geqslant 0$, $(\xi_k)_k \in \ell^\infty$.

(ii) $\forall k \geqslant 0$ les v.a. réelles $(f_k^*, \varepsilon_n)_n$ sont indépendantes et de même variance σ_k^2, nous supposons que $\sigma = (\sum_{k\geqslant 0} \sigma_k^p / (\xi_k^p \mathbb{I}_{\{\xi_k > 0\}}))^{1/p} < \infty$.

(iii) Soit $F_i = (\cdot, X_{i-1})\varepsilon_i$ et $G_i = (\cdot, \varepsilon_i)\varepsilon_i$, $i \in \mathbb{Z}$. $E(G_i) = E^{\mathcal{B}_{i-1}}(G_i) = C_\varepsilon$, $i \in \mathbb{Z}$.
Posons $E_i = ((F_i \rho_k^* f_k^*, f_k^*)/(\xi_k \mathbb{I}_{\{\xi_k > 0\}}))_{k\geqslant 0}$, c'est une variable aléatoire à valeurs dans $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme usuelle de ℓ^p, $i \in \mathbb{Z}$. F_i est une différence de martingale dans B (voir [1] p. 166, [2]), alors E_i est une différence de martingale dans ℓ^p, $i \in \mathbb{Z}$. On pose $\overline{E}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i$ et $C_{E_1}(x^*) = E((x^*, E_1)E_1)$, $x^* \in B^*$.

1.3. Construction de l'estimateur crible

Soit $\Theta = \{\rho = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k \rho_k \mid (\alpha_k)_k \in \ell^p\} \subset \mathcal{J}_p(B)$.

On peut munir Θ de la norme $\|\rho\|_P = (\sum_{k\geqslant 0} |\alpha_k|^p)^{1/p}$, qui est équivalente à la norme p-intégrale.

Dans ce paragraphe nous définissons les cribles en utilisant la décomposition (4) de ρ. Nous considérons le crible :

$$\Theta_m = \left\{\rho = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k \rho_k \mid \alpha_k = 0,\ k > m\right\}, \quad m \geqslant 0,\ m = m(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

L'estimateur crible de ρ par la méthode des moindres carrés est solution de l'équation suivante :

$$\min_{\rho\in\Theta_m} \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (f_k^*, X_{i+1} - \rho X_i)^2\right)^{p/2}.$$

La solution est donnée dans le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Si* $(C_n \rho_k^* f_k^*, \rho_k^* f_k^*) > 0$ *pour* $k = 0, \ldots, m$; *l'estimateur crible de* ρ *est l'opérateur*

$$\hat{\rho}_m = \sum_{k=0}^{m} \hat{\alpha}_k \rho_k$$

où

$$\hat{\alpha}_k = \frac{(D_n \rho_k^* f_k^*, f_k^*)}{(C_n \rho_k^* f_k^*, \rho_k^* f_k^*)}, \quad k = 0, \ldots, m.$$

2. Convergence de l'estimateur crible

Pour la convergence de l'estimateur crible nous utilisons les conditions suivantes :

C_1 : ε_t est une v.a. pré-gaussienne, $t \in \mathbb{Z}$, (cf. [6]).
C_2 : $E(\exp \gamma \|E_1\|_p) < \infty$ pour un $\gamma > 0$.
C_3 : $\|X_t\| \leqslant c_0$, où c_0 est une constante.
C_4 : $E\|X_t\|^4 < \infty$, $t \in \mathbb{Z}$.
C_5 : $\sup_{i\geqslant 1} E\|E_i\|_p^{2+\delta} < \infty$ pour un $\delta > 0$.

Nous supposons que $\xi_k > 0$, pour $k = 0, \ldots, m$.

Soient $w_{k,n} = (C_n \rho_k^* f_k^*, \rho_k^* f_k^*)/\xi_k$ et $\lambda_m = \min_{k=0,\ldots,m} \xi_k$, $k = 0, \ldots, m$; et Π_m la projection de Θ sur Θ_m.

On peut munir Θ_m de la norme empirique : $\forall \rho \in \Theta_m$, $\|\Pi_m \rho\|_n = (\sum_{k=0}^m w_{k,n}^p |\alpha_k|^p)^{1/p}$.

Soit $\rho_0 = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_{0,k} \rho_k$ la vraie valeur de ρ, on pose $\rho_m = \Pi_m \rho_0$.

Dans la proposition suivante nous montrons qu'il suffit d'utiliser la norme empirique pour montrer la convergence de l'estimateur crible :

Proposition 2.1. *Si* (C_4) *est vérifiée et si* $n^{1/2} \lambda_{m_n} (\log n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *alors* :

$$\left(\forall \beta > \frac{1}{2}\right), \quad n^{1/2} \lambda_{m_n} (\log n)^{-\beta} \left| \|\Pi_m \rho\|_n^p - \|\Pi_m \rho\|_P^p \right| \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} 0, \quad \rho \in \Theta.$$

Donc la convergence de $\hat{\rho}_m$ par rapport à la norme empirique entraîne sa convergence par rapport à la norme strictement p-integrale.

Dans la proposition suivante nous donnons les propriétés et la vitesse de convergence de la moyenne empirique du bruit blanc E_n, qui permet de déduire celles de $\hat{\rho}_m$. On note $\mathcal{D}$ la convergence en loi :

Proposition 2.2. *Quelle que soit la vitesse considérée du crible $m = m(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ on a* :

(i) *Si* (C_1) *est vérifiée alors* :

$$n^{1/\min(2,p)}(\log n)^{-\beta/\min(2,p)}\|\Pi_m\overline{E}_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0 \quad p.s.\ \forall\beta > 1.$$

(ii) *Si* (C_2) *et* (C_3) *sont vérifiées alors* $\forall\eta > 0$:

$$P\big(\|\Pi_m\overline{E}_n\|_p > \eta\big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n\eta^2}{8nl^2 + 4L\eta}\right)$$

où $l > 0$ et $L > 0$ sont deux constantes.

De plus on a :

$$n^{-1/2}(\log\log n)^{-1/2}\|\Pi_m\overline{E}_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0 \quad p.s.$$

(iii) *Si* (C_5) *est vérifiée alors* $\forall u^* \in \ell^q$:

$$\sqrt{n}\,(u^*, \Pi_m\overline{E}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} N \sim \mathcal{N}\big(0, E(u^*, E_1)^2\big).$$

Dans le cas particulier $p = 2$ on a :

$$\sqrt{n}\,\Pi_m\overline{E}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N \sim \mathcal{N}(0, C_{E_1})$$

où $\mathcal{D}$ désigne la convergence en loi dans ℓ^2.

Remarque 1. La condition (C_1) n'est pas nécessaire dans le cas $p = 2$.

Dans le théorème suivant nous donnons la vitesse de convergence de $\hat{\rho}_m$ pour tout choix de $m = m(n)$. Ainsi on peut choisir $m = m(n)$ tel que $\|\mathbb{I} - \Pi_m\rho_0\|_P = (\sum_{k>m(n)}\alpha_k^p)^{1/p}$ a la même vitesse de convergence que $\|\hat{\rho}_m - \rho_m\|_n$.

Théorème 2.3. (i) *Si* (C_1) *est vérifiée alors pour tout choix de $m = m(n)$* :

$$n^{1/\min(2,p)}(\log n)^{-\beta/\min(2,p)}\|\hat{\rho}_m - \rho_m\|_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0 \quad p.s.\ \forall\beta > 1$$

(ii) *Si* (C_2) *et* (C_3) *sont vérifiées alors pour tout $m = m(n)$ et* $\forall\eta > 0$:

$$P\big(\|\hat{\rho}_m - \rho_m\|_n > \eta\big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n\eta^2}{24nK^2 + 16L\eta}\right)$$

où $K > 0$ et $L > 0$ sont deux constantes.

De plus on a :

$$n^{1/2}(\log\log n)^{-1/2}\|\hat{\rho}_m - \rho_m\|_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0 \quad p.s.$$

(iii) *Si* (C_5) *est vérifiée et si $n^{1/2}\lambda_{m_n}(\log n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors* $\forall\theta^* \in \Theta^*$:

$$\sqrt{n}\,(\theta^*, \hat{\rho}_m - \rho_m) \xrightarrow{\mathcal{D}} N \sim \mathcal{N}\big(0, E(\zeta^*, E_1)^2\big)$$

où ζ^* est la suite dans ℓ^q associée à θ^*.

Dans le cas particulier $p = 2$ *on a* :

$$\sqrt{n}\,(\hat{\rho}_m - \rho_m) \xrightarrow{\mathcal{D}} N \sim \mathcal{N}(0, C_{E_1})$$

où $\mathcal{D}$ *désigne la convergence en loi dans* $\mathcal{J}_2$.

Exemple 1. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\ell^\infty, \ell^\infty)$ défini par $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ alors ρ est p-nucléaire [3], d'image dans ℓ^p tel que $\|\rho\|_p = \|\alpha\|_{\ell^p}$. L'opérateur *a est l'injection de* ℓ^p dans ℓ^∞ et b est l'identité dans ℓ^∞. Dans ce cas l'estimation de ρ revient à l'estimation de α dans ℓ^p car ρ s'écrit $\rho(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k (e_k, \cdot) e_k$, où $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de ℓ^p.

Références

[1] D. Bosq, Linear Processes in Function Spaces: Theory and Applications, Springer, 2000.
[2] D. Bosq, Estimation of mean and covariance operator of autoregressive processes in Banach spaces, Statist. Inference Stochastic Process. 5 (2002) 287–306.
[3] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
[4] U. Grenander, Abstract Inference, Wiley, New York, 1981.
[5] V.M. Kadets, M.I. Kadets, Rearrangements of Series in Banach Spaces, American Mathematical Society, 1991.
[6] M. Ledoux, M. Talagrand, Probability in Banach Spaces, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[7] J. Lindenstrauss, L. Tzafiri, Classical Banach Spaces I: Sequences Spaces, Ser. Modern Surveys Math., Springer-Verlag, 1977.
[8] A. Pelczynski, All separable Banach spaces admit for every $\varepsilon > 0$ fundamental and total biorthogonal sequences bounded by $(1+\varepsilon)$, Studia Math. 55 (1976) 295–304.
[9] F. Rachedi, Vitesse de convergence de l'estimateur crible d'un processus ARB(1), Ann. ISUP 48 (3) (2004) 87–97.
[10] F. Rachedi, T. Mourid, Estimateur crible de l'opérateur d'un processus ARB(1), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 336 (2003) 605–610.

Further reading

[11] J.S. Gal, Sur les moyennes arithmétiques des suites de fonctions orthogonales, Ann. Inst. Fourier 1 (1949) 53–56.