



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 933–938



<http://france.elsevier.com/direct/CRASSI/>

Problèmes mathématiques de la mécanique

Bandes phononiques interdites en élasticité linéarisée

Andrès Ávila^a, Georges Griso^b, Bernadette Miara^c

^a Universidad de La Frontera, Avenida Francisco Salazar, 01145 Temuco, Chili

^b Université Pierre et Marie Curie, laboratoire Jacques-Louis Lions, 4, place Jussieu, 75252 Paris, France

^c Laboratoire de modélisation et simulation numérique, ESIEE, 2, boulevard Blaise Pascal, 93160 Noisy-le-Grand, France

Reçu le 21 avril 2005 ; accepté le 25 avril 2005

Disponible sur Internet le 31 mai 2005

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans cette Note on justifie rigoureusement l'existence des bandes élastiques interdites dans des matériaux composites périodiques présentant de fortes hétérogénéités. On donne en particulier la méthode qui permet de calculer ces bandes. *Pour citer cet article* : A. Ávila et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Phononic band gaps in linearized elasticity. In this Note we rigorously justify the existence of elastic band gaps in three-dimensional periodic composite materials with strong heterogeneities. In particular, we show how to compute these bands. *To cite this article* : A. Ávila et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Vasseur et al. [3] have shown experimentally the existence, for a certain class of two-dimensional periodic composite media, of frequency intervals where there is *no propagation of elastic waves*; they are called *elastic band gaps*. In this Note we prove the existence of such phenomena in three-dimensional linear elasticity.

We consider a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with microstructures of size ε , the domain Ω is split into a matrix that occupies the domain Ω_1^ε and periodically embedded inclusions that occupy the domain Ω_2^ε , $\Omega = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$. We denote by $r^\varepsilon > 0$, $r^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ the mass density and by $c_{mnl}^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ the elasticity tensor of these materials. In the case of travelling elastic waves with fixed frequency ω , the amplitude $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ is the unique weak solution

Adresses e-mail : aavila@ufro.cl (A. Ávila), georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso), miarab@esiee.fr (B. Miara).

to the stationary variational problem (3). The aim of this work is to study the convergence of the sequence $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}_\varepsilon$. This is done using a convergence theorem which states that the sequence $\mathcal{T}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)$ (see [2] for the definition of the unfolding operator \mathcal{T}^ε) strongly converge in $L^2(\Omega \times Y)$ to the weak solution $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ to problem (4) where the ‘homogenized elasticity tensor’ c^* and the ‘homogenized mass density matrix’ $A^*(\omega)$ are given in (9) and (10).

Sketch of the proof. It is split into several steps. First we assume that the sequence $\{\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\}_\varepsilon$ is uniformly bounded, this yields to the convergences (6) and to the limit problem (7). With appropriate test-functions, we next solve problem (7), this leads successively to the computation of $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ and \mathbf{u} . Finally we show, by contradiction, that the a priori bound is satisfied.

The interesting thing to notice is that, for some values of ω , matrix $A^*(\omega)$ is definite negative, this in turn implies that, in this case, there is no propagating waves solution to problem (4). To prove this result we extend Bouchitté and Felbacq scalar approach [1] to the elasticity problem. More precisely let $\{\varphi^j, \lambda^j\}_{j \in J}$, $J = \{j \geq 1, \int_{Y_2} r_2(y) \varphi^j(y) \neq 0\}$ be the eigenelements given in (8) and associated to the resonance behavior of the system (the eigenvalues being in ascending mode), it is easy to show that in each interval $]\sqrt{\lambda^j}, \sqrt{\lambda^{j+1}}[$, $j \in J$ the smallest eigenvalue $\mu(\omega)$ of $A^*(\omega)$ is a function that increases from $-\infty$ to μ^j . If $\mu^j > 0$ there exists a value $\omega^j \in]\sqrt{\lambda^j}, \sqrt{\lambda^{j+1}}[$ such that $\mu(\omega^j) = 0$, hence $]\sqrt{\lambda^j}, \omega^j[$ is a band gap interval in which problem (4) has no progressive wave solution; if $\mu^j \leq 0$ then the whole interval $]\sqrt{\lambda^j}, \sqrt{\lambda^{j+1}}[$ is forbidden. \square

1. Description de la géométrie du domaine et des hétérogénéités

Après la mise en évidence de l’existence de *bandes photoniques interdites* pour les matériaux électromagnétiques, Vasseur et al. [3] ont montré expérimentalement l’existence, pour certaines classes de matériaux composites périodiques bi-dimensionnels, des bandes de fréquences dans lesquelles les ondes élastiques ne peuvent pas se propager; on les appelle des *bandes élastiques interdites ou bloquantes*. Ce travail permet d’établir l’existence de tels phénomènes en considérant des matériaux dont les caractéristiques présentent une forte hétérogénéité.

On considère un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière lipschitzienne $d\Omega$ et un corps élastique dont la configuration de référence $\bar{\Omega}$ est supposée sans contraintes. Le domaine Ω est constitué de deux matériaux répartis de façon périodique avec $\varepsilon > 0$ la taille des microstructures élémentaires. Dans la cellule de référence $Y =]0, 1[^3$ le matériau 2 occupe l’inclusion $Y_2, \bar{Y}_2 \subset Y$ et le matériau 1 occupe le domaine restant $Y_1 = Y \setminus \bar{Y}_2$. On note $\Omega = \Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ avec Ω_1^ε et $\Omega_2^\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^3} \varepsilon(\bar{Y}_2 + k) \cap \Omega$ les domaines occupés respectivement par les matériaux 1 et 2 et on suppose que le matériau 2 n’intersecte pas la frontière $d\Omega$. Ces deux matériaux sont caractérisés par leur densité de masse $r^\varepsilon \geq \rho > 0$, $r^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ et leur tenseur d’élasticité¹ $c_{mnkl}^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a la décomposition unique $x = [x] + \{x\}$ avec $x - [x] \in Y$ et on définit [2] l’opérateur d’éclatement \mathcal{T}^ε qui à toute fonction $v \in L^2(\Omega)$ prolongée par 0 en dehors de Ω associe $\mathcal{T}^\varepsilon(v) \in L^2(\Omega \times Y)$ défini par

$$\mathcal{T}^\varepsilon(v)(x, y) = v\left(\varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right] + \varepsilon y\right), \quad x \in \Omega, \quad y \in Y. \tag{1}$$

On peut alors préciser la dépendance en ε des caractéristiques du domaine par :

$$\begin{cases} \mathcal{T}^\varepsilon(r^\varepsilon)(x, y) = r_1(y), & \mathcal{T}^\varepsilon(c_{mnkl}^\varepsilon)(x, y) = c_{1,mnkl}(y), & x \in \Omega_1^\varepsilon, \quad y \in Y_1, \\ \mathcal{T}^\varepsilon(r^\varepsilon)(x, y) = r_2(y), & \mathcal{T}^\varepsilon(c_{mnkl}^\varepsilon)(x, y) = \varepsilon^2 c_{2,mnkl}(y), & x \in \Omega_2^\varepsilon, \quad y \in Y_2, \end{cases} \tag{2}$$

ce qui traduit la forte hétérogénéité entre la matrice qui occupe le domaine Ω_1^ε et les inclusions qui occupent le domaine Ω_2^ε . Les tenseurs d’élasticité possèdent les propriétés habituelles de symétrie et de coercivité : Il existe

¹ Les indices et exposants latins prennent leurs valeurs dans l’ensemble $\{1, 2, 3\}$. On applique la convention d’Einstein des indices et exposants répétés, on utilise des caractères gras pour représenter les vecteurs.

$\alpha > 0, \beta > 0$ tels que pour toute matrice symétrique (X_{mn}) , $\alpha X_{mn} X_{mn} \leq c_{1,mnkl} X_{mn} X_{kl} \leq \beta X_{mn} X_{mn}$, et $c_{1,klmn} = c_{1,mnkl} = c_{1,nmlk}$, et de même pour le tenseur $c_{2,mnkl}$.

2. Propagation des ondes élastiques

2.1. Équations d'évolution et problème stationnaire

On note $\mathbf{U}^\varepsilon = (U_m^\varepsilon) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de déplacement qui résulte de l'action des forces appliquées de volume $\mathbf{F} = (F_m) \in \mathbf{L}^2(\Omega \times \mathbb{R})$ et des conditions initiales $(\mathbf{U}^0 \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{U}^1 \in \mathbf{L}^2(\Omega))$, ce champ $\mathbf{U}^\varepsilon \in \mathbf{C}(\mathbb{R}; \mathbf{H}^1(\Omega))$ est l'unique solution faible du problème d'évolution :

$$\begin{cases} r^\varepsilon(x) \frac{d^2}{dt^2} U_m^\varepsilon(x, t) - \frac{d}{dx_n} (c_{mnkl}^\varepsilon(x) e_{kl}(\mathbf{U}^\varepsilon(x, t))) = F_m & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{U}^\varepsilon(x, t) = \mathbf{0} & \text{sur } d\Omega \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{U}^\varepsilon(x, 0) = \mathbf{U}^0(x), \quad \frac{d}{dt} \mathbf{U}^\varepsilon(x, 0) = \mathbf{U}^1(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $e_{kl}(\mathbf{V}(x, t)) = \frac{1}{2}(d_k V_l + d_l V_k)$ le tenseur linéarisé des déformations.

On cherche une solution périodique en temps, de période ω fixée et indépendante de ε , sous la forme $\mathbf{U}^\varepsilon(x, t) = \mathbf{u}^\varepsilon(x, \omega) e^{i\omega t}$ (par la suite on notera $\mathbf{u}^\varepsilon(x)$ au lieu de $\mathbf{u}^\varepsilon(x, \omega)$ l'amplitude de l'onde élastique) associée à des forces appliquées, elles aussi périodiques et de même période, $\mathbf{F}(x, t) = \mathbf{f}(x) e^{i\omega t}$. La solution $\mathbf{u}^\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ du problème stationnaire :

$$\begin{cases} \omega^2 r^\varepsilon(x) u_m^\varepsilon(x) + d_n (c_{mnkl}^\varepsilon(x) e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon(x))) = -f_m & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{0} & \text{sur } d\Omega, \end{cases}$$

est aussi solution du problème variationnel :

Trouver $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tel que pour tout $\Phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$

$$\omega^2 \int_{\Omega} r^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \Phi - \int_{\Omega} c_{mnkl}^\varepsilon e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{mn}(\Phi) = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Phi, \tag{3}$$

où $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_k v_k$.

On se propose maintenant de montrer que la suite $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}_\varepsilon$ solution de (3) converge dans un sens qui sera précisé plus bas vers la solution \mathbf{u} du problème homogène (4) ci-dessous.

2.2. Problème limite homogène

On établit maintenant le résultat de convergence suivant.

Théorème 2.1 (Théorème de convergence). *Pour toute période ω de l'onde incidente différente des valeurs de résonance $\{\sqrt{\lambda^j}\}$, $j \geq 1$ (définies dans l'Étape 3 ci-dessous) :*

- (i) *Il existe un champ de vecteurs $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que la suite $\mathcal{T}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)$ converge fortement vers \mathbf{u} dans $\mathbf{L}^2(\Omega \times Y)$;*
- (ii) *De plus la limite \mathbf{u} est solution du problème variationnel : Pour tout $\Phi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$*

$$\omega^2 \int_{\Omega} A^*(\omega) \mathbf{u}(x) \cdot \Phi(x) dx - \int_{\Omega} c_{mnkl}^* e_{kl}(\mathbf{u}(x)) e_{mn}(\Phi(x)) dx = - \int_{\Omega} B^*(\omega) \mathbf{f}(x) \cdot \Phi(x), \tag{4}$$

où le tenseur homogénéisé de l'élasticité c_{mnkl}^* et les matrices $A^*(\omega)$, $B^*(\omega)$ sont donnés en (9) et (10).

Démonstration. Elle se fait en plusieurs étapes.

Étape 1. On fait l'hypothèse a priori que la suite $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}_\varepsilon$ est bornée uniformément en ε , i.e., $\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C$. La coercivité du tenseur de l'élasticité et l'inégalité de Korn écrite sur chacun des domaines $\Omega_1^\varepsilon, \Omega_2^\varepsilon$ permettent alors de déduire qu'il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_1^\varepsilon)} + \|\varepsilon e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_2^\varepsilon)} \leq C. \quad (5)$$

Étape 2. Convergence des éclatés. La méthode d'homogénéisation [2] et les majorations (5) permettent d'obtenir les convergences qui suivent, on a noté χ_1, χ_2 les fonctions caractéristiques de Y_1 et Y_2 .

(i) Il existe trois champs limites

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y_1)), \quad \bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbf{H}_0^1(Y_2)), \quad \int_{Y_1} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

donnés par :

$$\begin{cases} \mathcal{T}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u}(x) + \chi_2(y)\bar{\mathbf{v}}(x, y) & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega \times Y), \\ \mathcal{T}^\varepsilon\left(\chi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)\right) \rightharpoonup \chi_1(y)(e_{kl,x}(\mathbf{u}(x)) + e_{kl,y}(\bar{\mathbf{u}}(x, y))) & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega \times Y), \\ \mathcal{T}^\varepsilon\left(\chi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon)\right) \rightharpoonup \chi_2(y)e_{kl,y}(\bar{\mathbf{v}}(x, y)) & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega \times Y). \end{cases} \quad (6)$$

(ii) Ces champs sont l'unique solution du problème variationnel limite

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_{\Omega \times Y} r(y)(\mathbf{u} + \chi_2(y)\bar{\mathbf{v}}) \cdot (\Phi + \chi_2(y)\bar{\Psi}) - \int_{\Omega \times Y} c_{mnkl}(y)(\chi_1(y)(e_{kl,x}(\mathbf{u}) + e_{kl,y}(\bar{\mathbf{u}})) + \chi_2(y)e_{kl,y}(\bar{\mathbf{v}})) \\ \times (\chi_1(y)(e_{mn,x}(\Phi) + e_{mn,y}(\bar{\Phi})) + \chi_2(y)e_{mn,y}(\bar{\Psi})) = - \int_{\Omega \times Y} \mathbf{f} \cdot (\Phi + \chi_2(y)\bar{\Psi}) \end{aligned} \quad (7)$$

satisfait pour tout triplet

$$\Phi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \bar{\Phi} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y_1)), \quad \bar{\Psi} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbf{H}_0^1(Y_2)), \quad \int_{Y_1} \bar{\Phi} = \mathbf{0}.$$

Étape 3. Un choix adapté des fonctions-test permet de résoudre le problème limite (7) de la façon suivante :

• On résout tout d'abord le problème posé dans Y_2 , ce qui permet de calculer $\bar{\mathbf{v}}$:

$$\omega^2 \int_{Y_2} r_2(y)\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\Psi} - \int_{Y_2} c_{2,mnkl}(y)e_{kl}(\bar{\mathbf{v}})e_{mn}(\bar{\Psi}) + \omega^2 \mathbf{u} \cdot \int_{Y_2} r_2(y)\bar{\Psi} = -\mathbf{f} \cdot \int_{Y_2} \bar{\Psi} \quad \text{pour tout } \bar{\Psi} \in \mathbf{H}_0^1(Y_2).$$

On note $\{\varphi^j, \lambda^j\}_{j \geq 1}$ la base des éléments propres associés à l'opérateur de l'élasticité (toutes les valeurs propres $\{\lambda^j\}_{j \geq 1}$ sont réelles et positives, elles sont rangées par ordre croissant)

$$\int_{Y_2} c_{2,mnkl}(y)e_{kl}(\varphi^j)e_{mn}(\bar{\Psi}) = \lambda^j \int_{Y_2} r_2(y)\varphi^j \cdot \bar{\Psi} \quad \text{avec} \quad \int_{Y_2} r_2(y)\varphi^p \cdot \varphi^q = \delta_p^q, \quad (8)$$

sans sommation sur j . Pour des valeurs de la fréquence qui ne correspondent pas à la résonance $\omega^2 \neq \lambda^j, j \geq 1$, le correcteur s'explique en fonction de \mathbf{u} sous la forme :

$$\bar{\mathbf{v}}(x, y) = \sum_{j \geq 1} \frac{-\omega^2 \mathbf{u}(x) \cdot \int_{Y_2} r_2(y)\varphi^j(y)}{\omega^2 - \lambda^j} \varphi^j(y) - \frac{\mathbf{f}(x) \cdot \int_{Y_2} \varphi^j(y)}{\omega^2 - \lambda^j} \varphi^j(y).$$

- On résout ensuite le problème posé dans Y_1 ce qui permet de calculer les fonctions de base de $\bar{\mathbf{u}}$.

$$\int_{Y_1} c_{1,mnkl}(y)(e_{kl,x}(\mathbf{u}) + e_{kl,y}(\bar{\mathbf{u}}))e_{mn}(\bar{\Phi}) = 0, \quad \text{pour tout } \bar{\Phi} \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y_1).$$

On exprime $\bar{\mathbf{u}}$ sous la forme $\bar{\mathbf{u}}(x, y) = e_{mn,x}(\mathbf{u}(x))\mathbf{z}_{mn}(y)$ où les fonctions de base $\mathbf{z}_{mn} \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y_1)$ sont calculées comme habituellement :

$$\int_{Y_1} c_{1,ijmn}(e_{kl,y}(\mathbf{z}_{mn}) + \delta_{mn}^{kl})e_{ij,y}(\bar{\Phi}) \, dy = 0 \quad \text{pour tout } \bar{\Phi} \in \mathbf{H}_{\text{per}}^1(Y_1),$$

ceci conduit à l'existence du tenseur homogénéisé c^* (indépendant de x et qui a les mêmes propriétés de symétrie et de coercivité que le tenseur initial) :

$$c_{ijkl}^* = \int_{Y_1} c_{1,ijmn}(e_{mn,y}(\mathbf{z}_{kl}) + \delta_{mn}^{kl}) \, dy. \tag{9}$$

- On résout enfin le problème posé dans Ω pour obtenir le problème limite en \mathbf{u} :

$$\omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Phi + \omega^2 \int_Y r(y) \cdot \int_{\Omega} \Phi \cdot \int_{Y_2} r_2(y) \bar{\mathbf{v}}(x, y) - \int_{\Omega} c_{mnkl}^* e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\Phi) = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Phi \quad \text{pour tout } \Phi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

On met $\int_{Y_2} r_2(y) \bar{\mathbf{v}}(x, y) \cdot \Phi(x)$ sous la forme $-\omega^2 A(\omega) \mathbf{u}(x) \cdot \Phi(x) - B(\omega) \mathbf{f}(x) \cdot \Phi(x)$, où les matrices A et B d'ordre 3 sont données par

$$\begin{cases} A_{qp}(\omega) = \sum_{j \in J} \frac{\int_{Y_2} r_2(y) \varphi_p^j(y) \int_{Y_2} r_2(y) \varphi_q^j(y)}{\omega^2 - \lambda^j}, \\ B_{qp}(\omega) = \sum_{j \in J} \frac{\int_{Y_2} \varphi_p^j(y) \int_{Y_2} r_2(y) \varphi_q^j(y)}{\omega^2 - \lambda^j}, \end{cases}$$

où $J = \{j \geq 1, \int_{Y_2} r_2(y) \varphi^j(y) \neq 0\}$. On obtient alors le problème (4) avec

$$A^*(\omega) = -\omega^2 A(\omega) + \left(\int_{Y_1} r_1(y) \, dy + \int_{Y_2} r_2(y) \, dy \right) I, \quad B^*(\omega) = -\omega^2 B(\omega) + I. \tag{10}$$

Étape 4. On justifie l'hypothèse a priori par l'absurde en supposant que $\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$. On considère le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon / \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ qui est solution d'un problème similaire à (1) où le second membre \mathbf{f} a été remplacé par $\mathbf{f} / \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$. La suite $\{\|\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\}_\varepsilon$ est uniformément bornée on peut donc lui appliquer le théorème de convergence précédent ce qui montre que la suite $\{\mathcal{T}^\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)\}_\varepsilon$ converge vers le déplacement nul, on montre ensuite que cette convergence est forte d'où la contradiction. \square

3. Existence des bandes phononiques interdites

Lorsque la matrice $A^*(\omega)$ admet une valeur propre négative le problème variationnel (4) n'admet pas de propagation d'ondes dans la direction du vecteur propre associé à cette valeur propre. Pour montrer l'existence des bandes phononiques interdites on étend à l'élasticité linéarisée tri-dimensionnelle l'approche proposée par Bouchitté et Felbacq [1] dans le cas scalaire. Plus précisément l'étude des variations de la fonction $\omega \rightarrow A^*(\omega) \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}$,

$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{z}\| = 1$ montre que, dans chaque intervalle $]\sqrt{\lambda^j}, \sqrt{\lambda^{j+1}}[$, $j \in J$, la plus petite valeur propre $\mu(\omega)$ de la matrice $A^*(\omega)$ est une fonction croissante qui va de $-\infty$ à une valeur bornée μ^j . Si $\mu^j > 0$ il existe une valeur $\omega^j \in]\sqrt{\lambda^j}, \sqrt{\lambda^{j+1}}[$ telle que $\mu(\omega^j) = 0$, la bande $]\sqrt{\lambda^j}, \omega^j[$ est bloquante et le problème (4) n'admet pas de solution de type ondes élastiques progressives ; si $\mu^j \leq 0$ alors tout l'intervalle $]\sqrt{\lambda^j}, \sqrt{\lambda^{j+1}}[$ est interdit.

Il est intéressant de noter pour les applications (qui utiliseraient une méthode d'optimisation de formes pour la sélection des bandes interdites en vue, par exemple, de la réduction des vibrations) que le nouveau tenseur homogénéisé de l'élasticité c^* ne dépend que des propriétés élastiques du matériau 1 et de la géométrie de la microstructure tandis que la nouvelle matrice de densité de « masse » $A^*(\omega)$ dépend aussi de la densité de masses moyenne initiale $\int_{Y_1} r_1(y) dy + \int_{Y_2} r_2(y) dy$ des deux matériaux.

Remerciements

Ce travail a été rendu possible grâce au projet européen “Smart Systems” HPRN-CT-2002-00284 et aux projets Fondecyt 1020298 et 7040209.

Références

- [1] G. Bouchitté, D. Felbacq, Homogenization near resonances and artificial magnetism from dielectrics, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 377–382.
- [2] A. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 99–104.
- [3] J. Vasseur, P. Deymier, G. Frantziskonis, G. Hong, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional periodic composite media, J. Phys. Condens. Matter 10 (1998) 6051–6064.