Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 839–842
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Systèmes dynamiques

Sur les bornes inférieures de l'écart des variétés invariantes

Jean-Pierre Marco

Institut de mathématiques de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 28 septembre 2004 ; accepté le 12 avril 2005

Disponible sur Internet le 11 mai 2005

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Soit m un entier $\geqslant 3$, on pose $\hbar(r)=\frac{1}{2}(r_1^2+\cdots+r_{m-1}^2)+r_m$ pour $r\in\mathbb{R}^m$, et on considère un vecteur $\overline{\omega}^0\in\mathbb{R}^{m-2}$ mal approché par les rationnels (au sens de l'approximation simultanée). Fixons $\alpha>1$, $L>0$ et $R>1+\|\overline{\omega}^0\|_\infty$. Nous construisons une suite (H_N) de Hamiltoniens de classe Gevrey-(α,L) sur $\mathbb{T}^m\times\overline{B}_\infty(0,R)$, qui converge vers $\hbar$ lorsque $N\to\infty$, tels que le système engendré par H_N laisse invariant un tore hyperbolique de vecteur fréquence *fixe* $(\overline{\omega}^0,1)$, qui admet un point homocline en lequel la matrice d'écart des variétés invariantes est de la forme $\operatorname{diag}(0,\nu_N,\ldots,\nu_N,0)\in M_m(\mathbb{R})$, avec $\nu_N\geqslant\exp(-c(\frac{1}{\varepsilon_N})^{1/2(\alpha-1)(m-2)})$, où $\varepsilon_N:=\|H_N-\hbar\|_{\alpha,L}$ et $c>0$. ***Pour citer cet article : J.-P. Marco, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Lower bounds of the splitting of the invariant manifolds. Let m be an integer $\geqslant 3$, set $\hbar(r)=\frac{1}{2}(r_1^2+\cdots+r_{m-1}^2)+r_m$ for $r\in\mathbb{R}^m$, and consider a badly approximable vector $\overline{\omega}^0\in\mathbb{R}^{m-2}$. Fix $\alpha>1$, $L>0$ and $R>1+\|\overline{\omega}^0\|_\infty$. We construct a sequence (H_N) of Gevrey-(α,L) Hamiltonian functions of $\mathbb{T}^m\times\overline{B}_\infty(0,R)$, which converges to $\hbar$ when $N\to\infty$, such that for each N the system generated by H_N possesses a $(m-1)$-dimensional hyperbolic invariant torus with *fixed* frequency vector $(\overline{\omega}^0,1)$, which admits a homoclinic point with splitting matrix of the form $\operatorname{diag}(0,\nu_N,\ldots,\nu_N,0)\in M_m(\mathbb{R})$, with $\nu_N\geqslant\exp(-c(\frac{1}{\varepsilon_N})^{1/2(\alpha-1)(m-2)})$, where $\varepsilon_N:=\|H_N-\hbar\|_{\alpha,L}$ and $c>0$. ***To cite this article: J.-P. Marco, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Définitions et résultat principal

1.1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on note $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et on munit l'anneau $\mathbb{A}^n=\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n$ des coordonnées angles-actions $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in\mathbb{T}^n$, $r=(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}^n$, et de sa structure symplectique canonique. On note $\langle x\rangle$ la projection

Adresse e-mail : marco@math.jussieu.fr (J.-P. Marco).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.020

sur $\mathbb{T}^n$ de $x \in \mathbb{R}^n$. Si H est un Hamiltonien sur un ouvert de $\mathbb{A}^n$, définissant un système complet, on note Φ^H son flot au temps 1.

Soit $n \geqslant 2$ et soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien C^∞ ne dépendant que des coordonnées d'action. Son flot Hamiltonien sur $\mathbb{A}^n$ laisse invariant chaque tore Lagrangien $\mathfrak{T}(r) = \mathbb{T}^n \times \{r\}$, et la restriction du difféomorphisme Φ^h à $\mathfrak{T}(r^0)$ est la rotation de vecteur $\omega = \partial_r h(r^0)$. Supposons ω simplement résonant (i.e. le module $\mathfrak{M} = \{\omega\}^\perp \cap \mathbb{Z}^n$ est de rang 1). Si $f_\varepsilon : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction assez régulière, et sous conditions de non-dégénérescence (voir [5]), le système Hamiltonien perturbé $H_\varepsilon = h + \varepsilon f_\varepsilon$ possède pour ε assez petit, au voisinage de $\mathfrak{T}(r^0)$, au moins un tore invariant hyperbolique $\mathcal{T}_\varepsilon$ de dimension $n-1$. La restriction de Φ^{H_ε} à $\mathcal{T}_\varepsilon$ est conjuguée à la rotation de vecteur ω sur le tore (de dimension $n-1$) obtenu par projection canonique de $\mathfrak{M}^\perp$ dans $\mathbb{T}^n$.

On s'intéresse ici au cas où le tore $\mathcal{T}_\varepsilon$ est voisin de $(\{0\} \times \mathbb{T}^{n-1}) \times \{r^0\}$, et où ses variétés invariantes $W^\pm(\mathcal{T}_\varepsilon, \Phi^{H_\varepsilon})$ sont des graphes au-dessus de domaines $D^\pm$ de $\mathbb{T}^n$, de la forme $I^\pm \times \mathbb{T}^{n-1}$, avec $I^+ = [0, \delta]$ et $I^- = [1-\delta, 1]$, où $\delta \in]1/2, 1[$. Soient alors $w_\varepsilon^\pm : D^\pm \to \mathbb{R}^n$ les fonctions telles que $W^\pm(\mathcal{T}_\varepsilon, \Phi^{H_\varepsilon})$ aient pour équation $r = w_\varepsilon^\pm(\theta)$, et soit $D = D^+ \cap D^- =]1-\delta, \delta[\times \mathbb{T}^{n-1}$. Considérons un point homocline $\xi = (\theta, r) \in W^+(\mathcal{T}_\varepsilon, \Phi^{H_\varepsilon}) \cap W^-(\mathcal{T}_\varepsilon, \Phi^{H_\varepsilon})$ qui vérifie $\theta \in D$ (et donc $r = w_\varepsilon^+(\theta) = w_\varepsilon^-(\theta)$). On définit alors la *matrice d'écart* $\mathfrak{S}(\xi, \Phi^{H_\varepsilon})$ des variétés $W^\pm(\mathcal{T}_\varepsilon, \Phi^{H_\varepsilon})$ au point ξ comme la Hessienne de la différence $w_\varepsilon^+ - w_\varepsilon^-$ au point θ. Cette matrice est symétrique, ses valeurs propres sont dites *angles d'écart* ou de splitting au point ξ. Notre problème est d'étudier l'asymptotique des angles d'écart lorsque ε tend vers 0. On renvoie à [2] pour des résultats généraux sur les bornes *supérieures* de l'écart.

Dans le cas de tores hyperboliques *dont le vecteur fréquence varie avec la perturbation*, nous avons donné dans [4] des bornes *inférieures* optimales des angles d'écart pour des systèmes de classe Gevrey, et dans [3] des bornes inférieures presque optimales pour des systèmes analytiques. Le but de cette Note est de montrer que le cas des tores *à fréquence fixe* est d'une autre nature, en insistant en particulier sur le rôle naturel joué par les notions d'approximation diophantienne *simultanée* dans ce type de problème.

1.2. Suivant [1], pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma > 0$ et $\gamma > 0$ introduisons l'ensemble

$$\Omega_n(\sigma, \gamma) = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ \|\ell\omega\|_{\mathbb{Z}} \geqslant \left(\frac{\gamma}{\ell}\right)^{(1+\sigma)/n} \right\}$$

où $\| \|_{\mathbb{Z}}$ désigne la distance au réseau $\mathbb{Z}^n$. On pose $\Omega_n(\sigma) = \bigcup_{\gamma > 0} \Omega_n(\sigma, \gamma)$. On sait que l'ensemble $\Omega_n(0)$ n'est pas vide, il contient en particulier les vecteurs $a = (a_1, \ldots, a_n)$ tels que $(1, a_1, \ldots, a_n)$ forme une base d'un corps algébrique sur $\mathbb{Q}$. Les éléments de $\Omega_n(0)$ sont dits *mal approchés* par les rationnels.

Nous considérons dans cette note des systèmes perturbés de classe Gevrey sur $\mathbb{A}^m$, laissant invariants des tores hyperboliques de dimension $m-1$ dont le vecteur fréquence (indépendant de la perturbation) est de la forme $(\overline{\omega}, 1)$, où $\overline{\omega} \in \mathbb{R}^{m-2}$ est un vecteur mal approché par les rationnels. Il est dans ce cas possible de construire des exemples avec des bornes inférieures explicites pour les angles d'écart des variétés invariantes. Nous renvoyons à [4] pour les définitions relatives aux classes Gevrey. Pour $R > 0$, $\overline{B}_\infty(0, R)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon R pour la norme Sup, notée $\| \|_\infty$.

Théorème 1.1. *Soit m un entier $\geqslant 3$ et soit $\hbar(r) = \frac{1}{2}(r_1^2 + \cdots + r_{m-1}^2) + r_m$. On considère un vecteur $\overline{\omega}^0$ de $\Omega_{m-2}(0)$. Soient $R > 1 + \|\overline{\omega}^0\|_\infty$, $\alpha > 1$ et $L > 0$ donnés. On pose $a_* = \frac{1}{2(\alpha-1)(m-2)}$. Il existe une suite $(H_N)_{N \geqslant N_0}$ de Hamiltoniens de $G^{\alpha,L}(\mathbb{T}^m \times \overline{B}_\infty(0, R))$, qui vérifie $\varepsilon_N := \|H_N - \hbar\|_{\alpha,L} \to 0$ si $N \to \infty$, et dont les flots laissent invariant un tore hyperbolique $\mathcal{T}^{(N)}$ de dimension $m-1$, de vecteur fréquence $(\overline{\omega}^0, 1)$, qui possède un point homocline $\zeta^{(N)}$ en lequel la matrice d'écart est de la forme*

$$\mathfrak{S}(\zeta^{(N)}, \Phi^{H_N}) = \operatorname{diag}(0, \nu_N, \ldots, \nu_N, 0) \in M_m(\mathbb{R}) \quad \textit{avec } \nu_N \geqslant \exp\left(-c\left(\frac{1}{\varepsilon_N}\right)^{a_*}\right),$$

où c est une constante positive.

La théorie des formes normales prévoit que l'exposant minimal dans notre situation est $a = 1/2\alpha(m-2)$. Notre méthode ne donne pas le résultat optimal, nous la voyons cependant comme la première étape d'une analyse géométrique de l'écart dans des situations non triviales, en dimension quelconque. Notons que $a^* \to \infty$ pour $\alpha \to 1$, ce qui vient de l'utilisation cruciale de fonctions à support compact dans notre construction, qui ne se transpose donc pas directement au cas analytique ($\alpha = 1$).

2. Démonstration du Théorème 1.1

2.1. Elle commence par la construction d'une suite de difféomorphismes sur $\mathbb{A}^n$, $n = m-1$. On fixe $\overline{\omega}^0 \in \Omega_{n-1}(0)$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_N(\theta_1, r_1) = \frac{1}{2}r_1^2 + \frac{1}{N^2}\cos 2\pi\theta_1$, et $\mathcal{P}_N = \Phi^{P_N}$. On pose enfin

$$\mathcal{F}_N = \Phi^{\frac{1}{2}(r_1^2+\cdots+r_n^2)+\cos 2\pi\theta_1} = \mathcal{P}_N \times \Phi^{\frac{1}{2}(r_2^2+\cdots+r_n^2)}.$$

Nous allons construire une suite $(\Psi_N)_{N\geqslant 1}$ de difféomorphismes de $\mathbb{A}^n$, de la forme $\Psi_N = \Phi^{f^{(N)}} \circ \mathcal{F}_N$, où la fonction $f^{(N)}$ est de norme Gevrey-(α, L) majorée par $1/N^2$, pour lesquels chaque tore

$$\mathcal{T}(\bar{r}^0) = \{(\theta, r) \in \mathbb{A}^n \mid \theta_1 = 0,\ r_1 = 0,\ \bar{r} = \bar{r}^0\}, \quad \bar{r}^0 \in \mathbb{R}^{n-1},$$

est invariant et hyperbolique, et pour lesquels l'écart des variétés du tore $\mathcal{T}(\overline{\omega}^0)$ est calculable.

Il est clair que pour tout $\bar{r}^0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, le tore $\mathcal{T}(\bar{r}^0)$ est invariant et hyperbolique pour $\mathcal{F}_N$, et que ses variétés invariantes $W^{\pm}(\mathcal{T}(\bar{r}^0), \mathcal{F}_N)$ coïncident. Sur ces variétés invariantes, on considère le point $\zeta^{(N)}$, produit du point $a_N = (\frac{1}{2}, \frac{2}{N})$ sur la séparatrice supérieure de $\mathcal{P}_N$ par le point de coordonnée angulaire $\bar{\theta} = 0$ sur le tore d'équation $\bar{r} = \bar{r}^0$, i.e. $\zeta^{(N)} = ((\frac{1}{2}, 0), (\frac{2}{N}, \bar{r}^0))$ en coordonnées angles-actions (θ, r) sur $\mathbb{A}^n$.

Nous allons construire une fonction $f^{(N)}$ dont le support ne rencontre l'orbite $O(\zeta^{(N)}, \mathcal{F}_N)$ du point $\zeta^{(N)}$ (sous l'action de $\mathcal{F}_N$) qu'au point $\zeta^{(N)}$, telle que $\Phi^{f^{(N)}}$ torde de manière contrôlée l'espace horizontal autour de $\zeta^{(N)}$, en laissant le point $\zeta^{(N)}$ fixe. Cette fonction sera de la forme

$$f^{(N)}(\theta_1, \bar{\theta}) = \mu_N f_1(\theta_1) \bar{f}^{(N)}(\bar{\theta}), \quad \theta_1 \in \mathbb{T},\ \bar{\theta} = (\theta_2, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{T}^{n-1}, \tag{1}$$

où μ_N est une constante de normalisation à déterminer, qui est directement reliée aux angles d'écart.

Pour choisir f_1 nous allons utiliser la conjugaison $(\mathcal{P}_N)^N = \sigma_N^{-1} \circ \mathcal{P}_1 \circ \sigma_N$, où $\sigma_N(\theta_1, r_1) = (\theta_1, N r_1)$. Notons $e_* = (\frac{1}{2}, 2)$ le point supérieur de la séparatrice de $\mathcal{P}_1$ et δ_* la coordonnée angulaire de $\mathcal{P}_1^{-1}(e_*)$. Alors les coordonnés angulaires des itérés $\mathcal{P}_1^k(e_*)$ sont dans l'intervalle $]0, \delta_*]$ pour tout $k \leqslant -1$, et dans l'intervalle $[1-\delta_*, 1[$ pour tout $k \geqslant 1$. Il en résulte que $(\mathcal{P}_N)^k(a_N) \in \{|\theta_1| \leqslant \delta_*\}$ pour $|k| \geqslant N$. On choisit pour f_1 une fonction Gevrey-(α, L) sur $\mathbb{T}$ égale à 1 au voisinage de $\frac{1}{2}$ et nulle dans l'intervalle $[-\delta_*, \delta_*]$.

Pour que le support de $f^{(N)}$ vérifie $\operatorname{Supp} f^{(N)} \cap O(\zeta^{(N)}, \mathcal{F}_N) = \{\zeta^{(N)}\}$ il suffit donc de choisir ensuite la fonction $\bar{f}^{(N)}$ nulle sur l'ensemble $\mathcal{E}_N(\overline{\omega}^0) = \{\langle \ell\overline{\omega}^0 \rangle \mid \ell \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant |\ell| \leqslant N-1\} \subset \mathbb{T}^{n-1}$. Notons

$$\varrho_N(\overline{\omega}^0) = \mathrm{d}_\infty\big(0, \mathcal{E}_N(\overline{\omega}^0)\big) \tag{2}$$

où d_∞ est la distance sur $\mathbb{T}^{n-1}$ associée à $\|\ \|_\infty$. Comme $\overline{\omega}^0$ est mal approché par les rationnels, il est possible de minorer $\varrho_N(\overline{\omega}^0)$:

$$\varrho_N(\overline{\omega}^0) \geqslant \left(\frac{\gamma}{N}\right)^{1/(n-1)} = \left(\frac{\gamma}{N}\right)^{1/(m-2)}, \tag{3}$$

pour une constante constante $\gamma > 0$ convenable. Nous allons utiliser le lemme suivant, démontré dans [4].

Lemme 2.1. *Soient $\alpha > 1$ et $L > 0$. Il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout réel $\kappa > 2$, il existe dans $G^{\alpha,L}(\mathbb{T})$ une fonction plateau η_κ qui vérifie $\eta_\kappa(\theta) = 1$ si $-\frac{1}{2\kappa} \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2\kappa}$, et $\eta_\kappa(\theta) = 0$ si $-\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant -\frac{1}{\kappa}$ ou $\frac{1}{\kappa} \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}$, et qui vérifie de plus $\|\eta_\kappa\|_{\alpha,L} \leqslant \exp(c\kappa^{1/(\alpha-1)})$.*

Choisissons $\kappa = 1/\varrho_N(\overline{\omega}^0)$ et posons

$$\bar{f}^{(N)}(\bar{\theta}) = \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{n}\eta_\kappa(\theta_j)(\theta_j^2+1) \tag{4}$$

donc $\bar{f}^{(N)} \equiv 0$ sur $\mathbb{T}^{n-1} \setminus B_\infty(0, \varrho_N(\overline{\omega}^0))$. La compatibilité de $\| \ \|_{\alpha,L}$ et du produit [4] entraîne l'inégalité $\|\bar{f}^{(N)}\|_{\alpha,L} \leqslant \exp(C(\frac{1}{\varrho_N(\overline{\omega}^0)})^{1/(\alpha-1)})$ pour une constante $C > 0$ et N assez grand. Posons enfin

$$\mu_N(\overline{\omega}^0) := \frac{1}{\|f_1\|_{\alpha,L}N^2}\exp\left(-C\left(\frac{1}{\varrho_N(\overline{\omega}^0)}\right)^{1/\alpha-1}\right) \tag{5}$$

ce qui conduit à l'inégalité $\|f^{(N)}\|_{\alpha,L} \leqslant 1/N^2$ pour N assez grand. D'après (3) on obtient la minoration

$$\mu_N(\overline{\omega}^0) \geqslant \exp\bigl(-C'N^{1/(\alpha-1)(m-2)}\bigr) \tag{6}$$

pour $C' > 0$ bien choisie et N assez grand.

2.2. On peut maintenant passer à l'estimation de l'écart des variétés de $\mathcal{T}(\overline{\omega}^0)$. Notons que par le choix de f_1 le difféomorphisme $\Phi^{f^{(N)}}$ se réduit à l'identité dans le domaine $\{|\theta_1| \leqslant \delta_*\}$, ce qui montre que pour $\bar{r}^0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathcal{T}(\bar{r}^0)$ est invariant par Ψ_N et de vecteur fréquence $\bar{r}^0$. La forme de la fonction $f^{(N)}$ entraîne de plus que $\Phi^{f^{(N)}} = \mathrm{Id}$ en tout point de l'orbite $O(\zeta^{(N)}, \mathcal{F}_N)$. En conséquence le point $\zeta^{(N)}$ est encore homocline à $\mathcal{T}(\overline{\omega}^0)$ pour Ψ_N, et nous allons calculer l'écart en ce point. Notons $a_-^{(N)}$ et $a_+^{(N)}$ les deux points de la séparatrice supérieure du pendule $\mathcal{P}_N$, symétriques par rapport à l'axe $\{\theta_1 = \frac{1}{2}\}$, tels que $a_+^{(N)} = \mathcal{P}_N(a_-^{(N)})$. Notons $\Delta^{(N)}$ l'arc de séparatrice compris entre ces deux points. Alors il est facile de vérifier que si $\mathfrak{T}(\overline{\omega}^0) = \mathbb{T}^{n-1} \times \{\overline{\omega}^0\} \subset \mathbb{A}^{n-1}$,

$$\Delta^{(N)} \times \mathfrak{T}(\overline{\omega}^0) \subset W^+\bigl(\mathcal{T}(\overline{\omega}^0), \mathcal{F}_N\bigr), \qquad \Phi^{f^{(N)}}\bigl(\Delta^{(N)} \times \mathfrak{T}(\overline{\omega}^0)\bigr) \subset W^-\bigl(\mathcal{T}(\overline{\omega}^0), \mathcal{F}_N\bigr),$$

et de plus $\zeta^{(N)} \in (\Delta^{(N)} \times \mathfrak{T}(\overline{\omega}^0)) \cap \Phi^{f^{(N)}}(\Delta^{(N)} \times \mathfrak{T}(\overline{\omega}^0))$. Il suffit donc d'évaluer l'effet de $\Phi^{f^{(N)}}$ sur l'espace tangent à $\Delta^{(N)} \times \mathfrak{T}(\overline{\omega}^0)$ en $\zeta^{(N)}$ pour obtenir la matrice d'écart. Au voisinage du point $\zeta^{(N)}$

$$\Phi^{f^{(N)}}(\theta, r) = \left(\theta, \left(r_1, r_2 - \mu_N\prod_{k\neq 2}(\theta_k^2+1)\theta_2, \ldots, r_n - \mu_N\prod_{k\neq n}(\theta_k^2+1)\theta_n\right)\right)$$

par (4) ce qui entraîne immédiatement que $\mathfrak{S}(\zeta^{(N)}, \mathcal{F}_N) = \mathrm{diag}(0, \mu_N, \ldots, \mu_N) \in M_n(\mathbb{R})$.

Pour obtenir la version continue de ce résultat, il suffit d'appliquer le lemme de suspension démontré dans [4], qui entraîne l'existence d'une suite H_N de Hamiltoniens de $\mathbb{A}^m$ vérifiant les hypothèses du théorème, avec une matrice d'écart de la forme indiquée, avec $\varepsilon_N = 1/N^2$ et $\nu_N = \mu_N$, la minoration des angles ν_N découlant de (6).

Remerciements

Je remercie P. Lochak pour de fructueuses discussions sur l'approximation simultanée.

Références

[1] P. Lochak, Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, Uspekhi Mat. Nauk 47 (1992) 59–140; Russian Math. Surveys 47 (1992) 57–133.

[2] P. Lochak, J.-P. Marco, D. Sauzin, On the splitting of invariant manifolds in multi-dimensional near-integrable Hamiltonian systems, Mem. Amer. Math. Soc. 163 (2003).

[3] J.-P. Marco, Uniform lower bounds of the splitting for analytic symplectic systems, soumis aux Ann. Inst. Fourier.

[4] J.-P. Marco, D. Sauzin, Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems, Publ. Math. I.H.E.S. 96 (2003).

[5] D. Treschev, A mechanism for the destruction of resonance tori in Hamiltonian systems, Math. USSR-Sb. 68 (1991) 181–203.