Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 809–814
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Limite semi-classique pour l'équation de Schrödinger non-linéaire avec potentiel harmonique

Sahbi Keraani

IRMAR, université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

Reçu le 4 janvier 2005 ; accepté après révision le 30 mars 2005

Disponible sur Internet le 17 mai 2005

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Dans cette Note on étudie la limite semi-classique d'une classe d'équations de Schrödinger non-linéaires focalisantes avec potentiel harmonique. La méthode est basée sur la stabilité orbitale de l'état fondamental et des lois de conservations quantiques et classiques. ***Pour citer cet article : S. Keraani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Semiclassical limit for a NLS with harmonic potential. This Note is dedicated to the semiclassical limit of the nonlinear focusing Schrödinger equation with a harmonic potential. The method does not use a linearization argument as is usually done, but the conservation laws (quantum and classical) and the stability of the ground state. ***To cite this article: S. Keraani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

We consider the semiclassical nonlinear focusing Schrödinger equation with a potential:

$$\mathrm{i}\epsilon\partial_t u^\epsilon + \frac{\epsilon^2}{2}\Delta u^\epsilon - V(x)u^\epsilon + |u^\epsilon|^{2\sigma}u^\epsilon = 0, \quad t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Here, $\Delta = \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2$ is the Laplace operator on $\mathbb{R}^N$, $u^\epsilon : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ is a complex-valued family of functions, ϵ is a small parameter (referring to Planck's constant) and V a real-valued potential. In [1] Bronski and Jerrard have considered Eq. (1) with the particular family of initial data

$$u^\epsilon(0,x) = Q\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\cdot\xi_0/\epsilon)}, \tag{2}$$

Adresse e-mail : keraani@univ-rennes1.fr (S. Keraani).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.014

where $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2N}$ and Q is the *ground state*: the unique real, positive and radial solution of the elliptic equation

$$\frac{1}{2}\Delta Q - Q + |Q|^{2\sigma} Q = 0.$$

The very particular form of the initial data allows them to prove that the solution of Eqs. (1) and (2) has an asymptotic soliton dynamics. Their method does not use a linearization argument as usually done, but the conservation laws (quantum and classical) and the stability of the ground state Q.

In [4], we have used the same method combined with a WKB intuition to improve the results of [1]. The main objective of the present note is to improve our result in [4] and to give a sharper description of the asymptotic behavior of the family of solutions to Eqs. (1) and (2) in the case of harmonic potential. In the sequel we denote by $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ the solution of the classical Hamiltonian

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = -\nabla V\big(\mathbf{x}(t)\big), \quad (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})_{|t=0} = (x_0, \xi_0). \tag{3}$$

Also, $\|\cdot\|_{H^1_\epsilon}$ stands for the following norm

$$\|f\|^2_{H^1_\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^N}\|f\|^2_{L^2} + \frac{1}{\epsilon^{N-2}}\|\nabla f\|^2_{L^2}.$$

The main result of this Note is

Theorem 0.1. *Assume $\sigma < \frac{2}{N}$ and $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$. Let (u^ϵ) be the family of solutions to* (1), (2)*, then*

$$u^\epsilon(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\cdot\boldsymbol{\xi}(t)+\theta^\epsilon(t))/\epsilon} Q\left(\frac{x-\mathbf{x}(t)}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \text{in } H^1_\epsilon \text{ as } \epsilon \downarrow 0,$$

uniformly in $t \in \mathbb{R}$, where $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ is the solution of the classical Hamiltonian system (3) *and θ^ϵ is a t-dependent shift term.*

1. Introduction

Soit l'équation de Schrödinger non-linéaire semi-classique avec potentiel :

$$\mathrm{i}\epsilon\partial_t u^\epsilon + \frac{\epsilon^2}{2}\Delta u^\epsilon - V(x)u^\epsilon + |u^\epsilon|^{2\sigma}u^\epsilon = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^N \partial^2_{x_j}$ est l'opérateur de Laplace et ϵ un petit paramètre. Il est bien connu (voir [3] par exemple) que pour $\sigma < \frac{2}{N}$ (la non-linéarité est *sous-critique*)[1] et pour une classe de potentiel V contenant le potentiel harmonique, l'équation (4) est globalement bien posée dans $\Sigma := \{f \in H^1; xf \in L^2\}$. Dans la suite on suppose toujours que $\sigma < \frac{2}{N}$.

Nous nous intéressons ici au comportement asymptotique, lorsque ϵ tend vers zéro, de la solution de l'Éq. (4) avec donnée initiale

$$u^\epsilon(0,x) = Q\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\cdot\xi_0)/\epsilon}, \tag{5}$$

[1] Si on considère l'Éq. (4) avec $V \equiv 0$ et $\epsilon = 1$ alors l'énergie totale $E = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sigma+1}\int |u|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x$ est conservée. Les valeurs $\sigma < \frac{2}{N}$ sont dites sous-critiques car dans le bilan d'énergie totale l'énergie cinétique domine l'énergie potentielle ; ce qui implique une borne a priori de la norme L^2 du gradient de la solution et donc l'existence globale. Ceci cesse d'être vrai à partir de l'exposant *critique* $\sigma = \frac{2}{N}$ et des solutions explosives existent dans ce cas là.

où Q désigne *l'état fondamental* : l'unique solution réelle, positive et radiale (non triviale) de l'équation non-linéaire elliptique

$$\frac{1}{2}\Delta Q - Q + |Q|^{2\sigma} Q = 0.$$

Dans ce cadre $e^{it} Q$ est une solution stationnaire de l'équation non-linéaire

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0.$$

Si on supprime le potentiel de l'Éq. (4) alors la transformation de Galilée et la définition de Q donnent une expression explicite des solutions du problème de Cauchy (4) et (5)

$$u^\epsilon = Q\left(\frac{x - \mathbf{x}(t)}{\epsilon}\right) e^{i(x\boldsymbol{\xi}(t)+\theta(t))/\epsilon},$$

où $\theta(t) = t - \frac{|\xi_0|^2}{2} t$ et $(\mathbf{x}(t) = v_0 t + x_0, \boldsymbol{\xi}(t) = \xi_0)$ est solution du système hamiltonien (dans le cas $V \equiv 0$)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = -\nabla V\big(\mathbf{x}(t)\big), \quad (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})_{|t=0} = (x_0, \xi_0). \tag{6}$$

En évoluant en temps, la solution de (4)–(5) a gardé, modulo une phase $\theta(t)$ qui dépend uniquement du temps, la même forme. La question qui se pose est de savoir si cette dynamique de soliton va être préservée si on ajoute à l'équation non-linéaire un potentiel V. Cette question était soulevée par Bronski et Jerrard dans [1] où ils donnent les premiers éléments de réponse dans le cas où le potentiel V est deux fois dérivable et borné ainsi que ses dérivées. Ces auteurs ont décrit la dynamique des limites, quand ϵ tend vers zéro, dans l'espace des mesures de Radon des densités de masse et du moment (voir [1] pour plus de détails). Leur méthode est basée sur les lois de conservation quantiques et classiques et la stabilité de l'état fondamental Q. Dans [4], on a utilisé la même méthode avec des arguments issus de la méthode BKW pour améliorer les résultats de [1]. L'objet de cette Note est d'améliorer le résultat de [4] et de donner une démonstration courte et facile pour le cas d'un potentiel harmonique[2] $V = \frac{|x|^2}{2}$ (qui sort du cadre des hypothèses de [4]).

Plaçons-nous dans le cas général et cherchons une solution de (4) et (5) sous la forme,

$$u(t, x, \epsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j U^j\left(t, \frac{x - \mathbf{x(t)}}{\epsilon}\right) e^{i(\varphi(t,x))/\epsilon},$$

par la méthode BKW. Un calcul direct montre que $U^0 = Q$ et que la phase ϕ satisfait l'équation eikonale

$$\partial_t \varphi(t, x) + \frac{1}{2}|\nabla\varphi(t, x)|^2 + V(x) - 1 = 0, \qquad \varphi(0, x) = x \cdot \xi_0.$$

Par le développement de Taylor en variable x autour de $\mathbf{x}(t)$ on obtient

$$\varphi(t, x) = \varphi\big(t, \mathbf{x}(t)\big) + \nabla_x \varphi\big(t, \mathbf{x}(t)\big)\big(x - \mathbf{x}(t)\big) + \mathcal{O}\big(\big|x - \mathbf{x}(t)\big|^2\big).$$

On peut facilement vérifier que $\nabla_x \varphi(t, \mathbf{x}(t)) = \boldsymbol{\xi}(t)$ et que

$$Q\left(\frac{x - \mathbf{x}(t)}{\epsilon}\right) e^{i(\varphi(t,x))/\epsilon} \sim Q\left(\frac{x - \mathbf{x}(t)}{\epsilon}\right) e^{i(x\boldsymbol{\xi}(t)+\theta(t))/\epsilon} \quad \text{dans } L^2\left(\mathbb{R}^N, \frac{dx}{\epsilon^N}\right),$$

où $\theta(t) := \varphi(t, \mathbf{x}(t)) - \boldsymbol{\xi}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$. Rappelons que, pour une large classe de potentiel (contenant le potentiel harmonique), le système (6) est globalement résoluble. De plus, l'Hamiltonien classique

$$H(t) = \frac{|\boldsymbol{\xi}(t)|^2}{2} + V\big(\mathbf{x}(t)\big)$$

[2] Remarquons que pour le potentiel harmonique, la solution de (6) est explicitement donnée par : $\mathbf{x}(t) = x_0 \cos(t) + \xi_0 \sin(t)$ et $\boldsymbol{\xi}(t) = -x_0 \sin(t) + \xi_0 \cos(t)$. Pour la suite, on préfère garder une notation générale.

est conservé. En utilisant cette loi de conservation, un calcul simple donne

$$\theta(t) = t\big(1 - H(0)\big) - \int_0^t \dot{\boldsymbol{\xi}}(s) \cdot \mathbf{x}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{7}$$

une quantité qui est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ (contrairement à φ qui peut développer des singularités en temps fini). On s'attend donc à ce que la famille u^ϵ puisse être approximée (comme c'est le cas lorsque $V \equiv 0$)[3] par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\cdot\boldsymbol{\xi}(t)+\theta(t))/\epsilon} Q(\frac{\cdot-\mathbf{x}(t)}{\epsilon})$. Dans cette Note on donne une justification partielle de ce comportement proposé par ces considérations formelles, mais en utilisant une méthode qui n'est pas basée sur la linéarisation (argument central de l'analyse BKW) mais sur les lois de conservation et la stabilité orbitale de Q.

Dans ce qui suit on désigne par $\|\cdot\|_{H^1_\epsilon}$ la norme définie par

$$\|f\|^2_{H^1_\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^N}\|f\|^2_{L^2} + \frac{1}{\epsilon^{N-2}}\|\nabla f\|^2_{L^2}.$$

Le résultat que nous obtenons est le suivant.

Théorème 1.1. *Supposons $\sigma < \frac{2}{N}$ et $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$. Soit (u^ϵ) la famille des solutions du problème de Cauchy* (4) *et* (5)*. On a alors, quand ϵ tend vers zéro,*

$$u^\epsilon(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\cdot\boldsymbol{\xi}(t)+\theta^\epsilon(t))/\epsilon} Q\left(\frac{x - \mathbf{x}(t)}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \text{dans } H^1_\epsilon,$$

uniformément en $t \in \mathbb{R}$, où $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ désigne la solution du système hamiltonien classique (6) *et θ^ϵ une phase qui ne dépend que du temps.*

Remarque 1. La phase inconnue θ^ϵ est conséquence de la méthode basée sur la stabilité orbitale (modulo translations et rotations) de Q. A part ce terme, le comportement proposé par le développement formel de la méthode BKW est justifié. Le fait que ce terme inconnu de la phase ne dépende que du temps permet, par exemple, de donner une description rigoureuse de la dynamique de la mesure de Wigner associée à $(\frac{1}{\epsilon^{N/2}}u^\epsilon(t))$ (voir [4]).

Remarque 2. Le théorème reste vrai pour des potentiels de type $V(x) = \sum \alpha_i^2 x_i^2 + a.x + b$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}$. En effet, dans la démonstration, on utilise seulement le fait que le potentiel est un polynôme d'ordre 2 dont les coefficients d'ordre deux sont positifs. Notons que, dans ce cas là aussi, les trajectoires classiques sont données de manière exacte.

Remarque 3. Dans le cas critique ($\sigma = \frac{2}{N}$) la conclusion de ce théorème est fausse. En effet si $\sigma = \frac{2}{N}$, $V = \frac{1}{2}|x|^2$ et $x_0 = \xi_0 = 0$ alors les solutions de (4) et (5) sont explicitement données par

$$u^\epsilon(t,x) = \frac{1}{(\cos t)^{N/2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}((2-|x|^2)\tan t)/(2\epsilon)} Q\left(\frac{x}{\epsilon\cos(t)}\right).$$

Dans le cas critique le profil Q subit une dilatation par une échelle qui explose en $t = \pi/2$. Remarquons que cette construction explicite est valable seulement dans le cas invariant par changement d'échelle ; c'est-à-dire dans le cas critique. Pour plus de détails sur l'équation de Schrödinger non-linéaire avec potentiel harmonique, le lecteur est invité à consulter [2] et les références qui s'y trouvent.

[3] Ceci est vrai aussi pour un potentiel de type $V(x) = ax + b$ où $a \in \mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}$. En effet, dans ce cas là, la formule est exacte avec $\mathbf{x}(t) = -\frac{t^2}{2}a + \xi_0 t + x_0$, $\boldsymbol{\xi}(t) = -ta + \xi_0$ et $\theta(t) = \frac{t^3}{6}|a|^2 - \frac{t^2}{2}\xi_0 \cdot a + t(1 - \frac{|\xi_0|^2}{2} - 2a \cdot x_0 - b)$.

2. Preuve du Théorème 1.1

Soit la fonction θ à valeurs réelles définie par (7). On définit la fonction v^ϵ par

$$v^\epsilon(t,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}((\epsilon x+\mathbf{x}(t))\boldsymbol{\xi}(t)+\theta(t))/\epsilon} u^\epsilon\big(t, \epsilon x + \mathbf{x}(t)\big). \tag{8}$$

Par un calcul simple (dans lequel on utilise la conservation de l'Hamiltonien classique) on montre facilement que v^ϵ est solution du problème de Cauchy

$$\mathrm{i}\epsilon\partial_t v^\epsilon + \frac{1}{2}\Delta v^\epsilon - \left(1+\frac{\epsilon^2}{2}|x|^2\right)v^\epsilon + |v^\epsilon|^{2\sigma}v^\epsilon = 0, \qquad v^\epsilon(0,x) = Q(x). \tag{9}$$

Elle vérifie en outre les lois de conservation suivantes :

$$\mathcal{N}(t) := \int \left|v^\epsilon(t,x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int |Q|^2\,\mathrm{d}x,$$

$$E^\epsilon\big(v^\epsilon(t)\big) := \frac{1}{2}\int |\nabla v^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sigma+1}\int |v^\epsilon|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x + \int \left(1+\frac{\epsilon^2}{2}|x|^2\right)|v^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x = E^\epsilon\big(v^\epsilon(0)\big).$$

La démonstration du théorème consiste à appliquer à v^ϵ un théorème de stabilité orbitale qui est due à Weinstein [6] et Kwong [5]. Dans ce contexte rappelons que Q est l'unique solution radiale et positive du problème variationnel suivant :

$$\mathcal{E}(Q) = \inf\big\{\mathcal{E}(v),\ v\in\mathcal{F}\big\}; \tag{10}$$

où

$$\mathcal{F} = \big\{v\in H^1,\ \|v\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}\big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(v) := \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sigma+1}\int |v|^{2\sigma+2}\,\mathrm{d}x.$$

La version radiale du théorème de stabilité orbitale de l'état fondamental est donnée par

Proposition 2.1 [6,5]. *Supposons $\sigma < \frac{2}{N}$. Il existe deux constantes C, h, telles que*

$$\inf_{\theta\in[0,2\pi[} \|\phi - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}Q\|_{H^1}^2 \leqslant C\big(\mathcal{E}(\phi) - \mathcal{E}(Q)\big)$$

pour tout $\phi\in H^1$ radiale, vérifiant $\|\phi\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ et $\mathcal{E}(\phi) - \mathcal{E}(Q) < h$.

On constate que

$$E^\epsilon\big(v^\epsilon(t)\big) = \mathcal{E}\big(v^\epsilon(t)\big) + \int \left(1+\frac{\epsilon^2}{2}|x|^2\right)|v^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x.$$

D'autre part, la conservation de l'énergie totale s'écrit

$$E^\epsilon\big(v^\epsilon(t)\big) = E^\epsilon\big(v^\epsilon(0)\big) = \mathcal{E}(Q) + \int \left(1+\frac{\epsilon^2}{2}|x|^2\right)|Q|^2\,\mathrm{d}x.$$

Grâce à la conservation de la norme L^2 on aura

$$\mathcal{E}\big(v^\epsilon(t)\big) - \mathcal{E}(Q) = \int \frac{\epsilon^2}{2}|x|^2|Q|^2\,\mathrm{d}x - \int \frac{\epsilon^2}{2}|x|^2|v^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x.$$

Étant donné que $\mathcal{E}(v^\epsilon(t)) - \mathcal{E}(Q)$ est positive (car Q est solution du problème variationel (10)), on obtient

$$0 \leqslant \mathcal{E}\big(v^\epsilon(t)\big) - \mathcal{E}(Q) \leqslant \int \frac{\epsilon^2}{2}|x|^2|Q|^2\,\mathrm{d}x - \int \frac{\epsilon^2}{2}|x|^2|v^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x = \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

uniformément en $t \in \mathbb{R}$. Remarquons qu'il est facile de vérifier que l'Éq. (9) est invariante par rotation. Combinée avec le fait que la donnée initiale est radiale ceci implique que la solution est radiale à chaque instant. D'après la Proposition 2.1, il existe une famille $\tilde{\theta}^\epsilon \in [0, 2\pi[$, telle que

$$\left\| v^\epsilon - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}^\epsilon(t)} Q(\cdot) \right\|_{H^1}^2 \leqslant C\left(\mathcal{E}\left(v^\epsilon(t)\right) - \mathcal{E}(Q)\right) = C\left(\int \frac{\epsilon^2}{2}|x|^2|Q|^2\,\mathrm{d}x - \int \frac{\epsilon^2}{2}|x|^2|v^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x \right).$$

Ceci implique que

$$\left\| v^\epsilon - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}^\epsilon(t)} Q(\cdot) \right\|_{H^1}^2 + C\int \frac{\epsilon^2}{2}|x|^2|v^\epsilon|^2\,\mathrm{d}x = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \text{quand } \epsilon \downarrow 0,$$

uniformément en $t \in \mathbb{R}$. En terme de u^ϵ, il vient

$$\left\| u^\epsilon - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\cdot\boldsymbol{\xi}(t)+\theta^\epsilon(t))/\epsilon} Q\left(\frac{\cdot - \mathbf{x}(t)}{\epsilon}\right) \right\|_{H^1_\epsilon}^2 + \frac{C}{\epsilon^N}\left\| \left(x - \mathbf{x}(t)\right)u^\epsilon \right\|_{L^2}^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \text{quand } \epsilon \downarrow 0,$$

avec $\theta^\epsilon = \theta + \epsilon\tilde{\theta}^\epsilon$. Vu que les deux quantités sont positives alors le Théorème 1.1 est prouvé.

Remarque 4. La démonstration nous donne aussi

$$\frac{1}{\epsilon^N}\left\| \left(x - \mathbf{x}(t)\right)u^\epsilon \right\|_{L^2}^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \text{quand } \epsilon \downarrow 0,$$

quelque chose qui ne découle pas du simple fait que $\frac{1}{\epsilon^N}|u^\epsilon(t,x)|^2 \rightharpoonup \|Q\|_{L^2}^2 \delta_{\mathbf{x}(t)}$. Elle exprime une certaine force de concentration : le poids $|x|^2$ ne detecte pas un résidu de la masse en dehors de $\mathbf{x}(t)$.

Références

[1] J.C. Bronski, R.L. Jerrard, Soliton dynamics in a potential, Math. Res. Lett. 7 (2–3) (2000) 329–342.

[2] R. Carles, Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications, SIAM J. Math. Anal. 35 (4) (2003) 823–843.

[3] T. Cazenave, An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations, Text. Metod. Mat., vol. 26, Univ. Fed. Rio de Janeiro, 1993.

[4] S. Keraani, Semiclassical limit of a class of Schrödinger equations with potential, Comm. Partial Differential Equations 27 (3–4) (2002) 693–704.

[5] M.K. Kwong, Uniqueness of positive solutions to $\Delta - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$, Arch. Rat. Mech. Anal. 105 (3) (1989) 243–266.

[6] M.I. Weinstein, Lyapunov stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations, SIAM J. Math. Anal. 16 (1985) 472–491.