Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 743–746
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Formules pour les espaces multisécants aux courbes algébriques

Patrick Le Barz

Laboratoire Jean-Dieudonné, URA 168, parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

Reçu le 11 septembre 2004 ; accepté après révision le 29 mars 2005

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

On présente un nouvel algorithme donnant des formules pour le nombre de d-plans k-sécants à une courbe lisse de $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$, et cela pour k, d, N quelconques. Castelnuovo [Rend. Palermo 3 (1889) 27–37] et Tanturri [Ann. Mat. 4 (1900) 67–122] avaient donné des résultats partiels. Voir aussi E. Arbarello et al. [Geometry of Algebraic Curves, vol. 1, Grundlehren Math. Wiss., vol. 267, Springer-Verlag, 1985]. ***Pour citer cet article : P. Le Barz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Formulas for multisecant spaces to algebraic curves. We give a general new algorithm to find formulas for the number of k-secant d-planes to a smooth curve in $\mathbf{P}^N(\mathbf{C})$, for any k, d, N. Partial results were given by Castelnuovo [Rend. Palermo 3 (1889) 27–37] and Tanturri [Ann. Mat. 4 (1900) 67–122]. See also E. Arbarello et al. [Geometry of Algebraic Curves, vol. 1, Grundlehren Math. Wiss., vol. 267, Springer-Verlag, 1985]. ***To cite this article: P. Le Barz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1.

En 1863, Cayley donne la formule pour le nombre q de droites 4-sécantes à une courbe C de $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ de degré n et genre g :

$$q = \frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4) - \frac{g}{2}(n^2+7n+13-g). \tag{1}$$

On sait [2] que cette formule est valable pour toute courbe lisse de $\mathbf{P}^3$ pourvu qu'on définisse q comme le degré d'un certain 0-cycle $\mathrm{Sec}_4(C)$ dans la grassmannienne $G(1,\mathbf{P}^3)$ des droites de $\mathbf{P}^3$. Lorsque, dans des cas dégénérés,

Adresse e-mail : lebarz@unice.fr (P. Le Barz).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.002

la courbe a une infinité de 4-sécantes, ce degré q ne représente plus rien géométriquement. Cependant en général, le 0-cycle $\mathrm{Sec}_4(C)$ correspond à un ensemble *fini* de 4-sécantes et donc q a bien une signification géométrique.

2.

On se propose ici de généraliser (1) et de trouver des formules pour le nombre de sous-espaces $[d]$ qui sont k-sécants à une courbe C de $\mathbf{P}^N$. On note $[d]$ un sous-espace de dimension d et $c = N - d$ sa codimension. C'est uniquement dans le cas où k vérifie

$$k(c-1) = \dim G\big(d, \mathbf{P}^N\big) \ (= (d+1)c) \tag{2}$$

qu'on s'attend à un nombre fini de $[d]$ k-sécants. Il y a donc *dans ce cas* deux questions distinctes :

(a) Etablir une formule pour le nombre $\nu^k(d,N)$ de sous-espaces $[d]$ k-sécants à $C \subset \mathbf{P}^N$ où $\nu^k(d,N)$ est défini comme le degré d'un certain 0-cycle $\mathrm{Sec}_k(C)$ dans la grassmannienne $G(d,\mathbf{P}^N)$.

(b) Eclaircir pour quelles courbes dégénérées ce 0-cycle n'a plus de signification géométrique.

Grâce à un *algorithme entièrement nouveau,* nous répondrons ici complètement à la question (a). Mais nous ne savons pas répondre à la question (b), c'est-à-dire expliciter les cas où il y a, malgré (2), toute une courbe de $[d]$ k-sécants à C dans la grassmannienne $G(d,\mathbf{P}^N)$.

3.

Plus généralement, cette fois pour $k \in \mathbf{N}$ *quelconque,* on définira le cycle $\mathrm{Sec}_k(C)$ dans $CH^{k(c-1)}(G)$ (et non plus $CH^{\mathrm{top}}(G)$) où $CH^{\bullet}(G)$ désigne l'anneau d'équivalence rationnelle de $G = G(d,\mathbf{P}^N)$. Le cycle $\mathrm{Sec}_k(C)$ sera appelé le « cycle des $[d]$ k-sécants à C ». Il permettra de donner des formules k-sécantes *avec conditions de Schubert.*

Le théorème qui suit permet d'exprimer les cycles $\mathrm{Sec}_k(C)$ en fonction des cycles de Schubert spéciaux σ_i.

Théorème 3.1. *Soit $c \geqslant 2$ un entier fixé. Soit $G = G(d,\boldsymbol{P}^N)$ la grassmannienne des sous-espaces $[d]$ de $\boldsymbol{P}^N$ de dimension $d = N - c$. Pour $m \in \boldsymbol{N}$, on note $q^m(p) \in CH^p(G)$ le coefficient de u^p dans l'expression $(\sum_{i=0}^{c} \sigma_i u^i)^m$ (on pose $q^m(p) = 0$ pour $p < 0$). Considérons les polynômes dans $CH^{\bullet}(G)[t]$:*

$$D(t) = 1 + \sigma_{c-1}t + \sigma_c^2 \sum_{j \geqslant 3} (-1)^j q^{j-2}\big(j(c-1) - 2c\big)t^j,$$

$$E(t) = (1 + \sigma_{c-1}t)^2 - \sigma_c\sigma_{c-2}t^2 + \sigma_c^3 \sum_{j \geqslant 4} (-1)^j q^{j-3}\big(j(c-1) - 3c\big)t^j.$$

Soit $C \subset \boldsymbol{P}^N$ une courbe lisse connexe de degré n et genre g. En notant α_k le coefficient de t^k dans l'expression

$$\frac{E(t)^{g+n-1}}{D(t)^{2g+n-2}}, \tag{3}$$

le cycle $\mathrm{Sec}_k(C) \in CH^{k(c-1)}(G)$ des $[d]$ k-sécants à C est égal à α_k.

Remarque 1. En particulier, supposant dans (2) $k(c-1) = (d+1)c$, on a $\alpha_k \in CH^{\mathrm{top}}(G)$. L'égalité des degrés donne la formule pour le nombre cherché : $\nu^k(d,N) = \deg(\alpha_k)$.

Exemple 1. Notons ν_k le nombre de $[k-2]$ k-sécants pour une courbe de degré n et genre g dans $\mathbf{P}^{2k-2}$. Si $S(t)=\sum_{k\geqslant 0}\nu_k t^k\in\mathbf{Z}[[t]]$ est la série génératrice, le théorème précédent permet de la calculer explicitement :

$$S(t)=\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}\right)^n\left(\frac{-1-4t+(1+2t)\sqrt{1+4t}}{2t^2}\right)^{g-1}.$$

4.

Il est temps de définir exactement les cycles $\mathrm{Sec}_k(C)\in CH^{k(c-1)}(G)$, pour k quelconque.

4.1.

Considérons $G\times\mathbf{P}^N$ comme fibration sur G ; soit $T\subset G\times\mathbf{P}^N$ la sous-fibration tautologique de fibre P en $P\in G$. On note $\mathrm{Co}^k(d,\mathbf{P}^N)$ le schéma de Hilbert relatif $\mathrm{Hilb}^k(T/G)$ formé des couples (P,ξ) avec $\xi\subset P$ (dits k-uplets « coplanaires »). Notons σ et u les deux projections sur G et $\mathbf{P}^N$. L'application σ est aussi une fibration de fibre-type $\mathrm{Hilb}^k\mathbf{P}^d$ qui est non-singulier de dimension dk (du moins dans sa partie curviligne [3], la seule qui nous intéresse ici). Notons W^k le schéma $u^{-1}\mathrm{Hilb}^k(C)$; son image $\sigma(W^k)$ est formée des $P\in G$ qui sont k-sécants à C. On a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccccc} W^k & \xrightarrow{\ \mathrm{j}\ } & \mathrm{Co}^k(d,\mathbf{P}^N) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & G=G(d,\mathbf{P}^N) \\ {\scriptstyle \mathrm{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{u}} & & \\ \mathrm{Hilb}^k C & \xrightarrow{\ \mathrm{i}\ } & \mathrm{Hilb}^k\mathbf{P}^N. & & \end{array}$$

Pour un plongement régulier $i:X\to Y$ et un morphisme $f:V\to Y$, Fulton ([1], 6.1) construit un cycle noté $X.V$ sur le schéma $W=f^{-1}(X)$; plus précisément, $X.V$ est dans le groupe $CH_{r-q}(W)$ où $r=\dim(V)$ et $q=\mathrm{codim}_Y X$. Dans notre cas, posons $X^k=\mathrm{Hilb}^k C$, $Y^k=\mathrm{Hilb}^k\mathbf{P}^N$, $V^k=\mathrm{Co}^k(d,\mathbf{P}^N)$ et $f=u$; on donne alors la :

Définition 4.1. On pose $\mathrm{Sec}_k(C)=\sigma_* j_*(X^k.V^k)$ dans $CH^\bullet(G)$ et on dit que c'est le *cycle* des $[d]$ qui sont k-sécants à C.

Définition 4.2. Pour $C\in\mathbf{P}^N$ et $d\geqslant 1$, on définit le *polynôme sécant* de C dans $CH^\bullet(G)[t]$:

$$\mathrm{Sec}(C)=\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{Sec}_k(C)t^k.$$

Soient C et C' deux courbes lisses *disjointes* de $\mathbf{P}^N$. Alors on a l'égalité de polynômes :

$$\mathrm{Sec}(C\sqcup C')=\mathrm{Sec}(C).\,\mathrm{Sec}(C'). \tag{4}$$

En effet, $\mathrm{Hilb}^k(C\sqcup C')$ se décompose en somme disjointe des $H^{i,j}\simeq\mathrm{Hilb}^i(C)\sqcup\mathrm{Hilb}^j(C')$, pour $i+j=k$. Par suite le cycle $\mathrm{Sec}_k(C\sqcup C')$ est la somme des $\mathrm{Sec}_i(C).\,\mathrm{Sec}_j(C')$ pour $i+j=k$.

4.2.

Pour une courbe Γ non nécessairement connexe, le genre ne convient pas ; on préfère utiliser le *rang* de Γ, ou plutôt la moitié du rang, qu'on notera f. Si Γ est connexe de degré n et genre g, on a $f=g+n-1$. En général, on a $f(C\sqcup C')=f(C)+f(C')$. D'après le théorème de Vassallo [4], $\mathrm{Sec}(C)$ ne dépend que de n et f pour une courbe C (connexe ou non).On écrira donc $\mathrm{Sec}(C)=\mathrm{Sec}(n,f)$ et le résultat (4) donne l'égalité $\mathrm{Sec}(n+n',f+f')=$

$\mathrm{Sec}(n, f).\mathrm{Sec}(n', f')$. En notant D le polynôme sécant d'une *droite* et E celui d'une *conique*, on arrive alors à $\mathrm{Sec}(C) = \mathrm{Sec}(n, f) = E^f/D^{2f-n}$. Le seul cas qui nous intéresse en pratique est celui où C est connexe de degré n et genre g, soit : $\mathrm{Sec}(C) = E^{g+n-1}/D^{2g+n-2}$ comme annoncé dans le théorème.

Il reste à calculer les polynômes D et E ! Comme une droite et une conique sont des courbes très dégénérées (du point de vue des espaces multisécants), il faut passer par des calculs *d'intersection excédentaire*. C'est là, évidemment, la partie la plus longue et la plus délicate de la démonstration.

5.

Disons un mot des multiplicités ; on se place dans le cas (2) $(d+1)c = k(c-1)$ où on attend un nombre fini de $[d]$ k-sécants. Reprenons l'exemple de la formule de Cayley pour le nombre q de droites 4-sécantes à C dans $\mathbf{P}^3$. Pour $C = S_3 \cap S_5$ l'intersection complète d'une cubique et d'une quintique, la formule donne $q = 135$. Or toute droite 4-sécante à C est l'une des 27 droites de S_3, mais $135 = 27 \times 5$. On voit donc qu'une droite 5-sécante à une courbe compte cinq fois comme 4-sécante, puisqu'à un 5-uplet aligné correspondent cinq 4-uplets alignés distincts. Plus généralement, on voit qu'un $[d]$ p-sécant à C dans $\mathbf{P}^N$ comptera en général $\binom{p}{k}$ fois comme $[d]$ k-sécant. Par ailleurs, même si un $[d]$ coupe transversalement C en exactement k points différents, il peut compter avec une multiplicité $m > 1$ lorsque les tangentes à C en ces k points ne sont pas en position générale.

Références

[1] W. Fulton, Intersection Theory, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 2, Springer-Verlag, 1984.
[2] P. Le Barz, Validité de certaines formules de géométrie énumérative, C. R. Acad. Sci. Paris 289 (1979) 755–758.
[3] P. Le Barz, Platitude et non-platitude de certains sous-schémas de $\mathrm{Hilb}^k\mathbf{P}^N$, J. Reine Angew. Math. 3 (48) (1984) 116–134.
[4] V. Vassallo, Justification de la méthode fonctionnelle pour les courbes gauches, Acta Math. 172 (1994) 257–297.