Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 709–714

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Inégalités d'incertitude associées à des fonctions homogènes

Bruno Demange

UMR 6628-MAPMO, université d'Orléans, B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 2, France

Reçu le 9 février 2005 ; accepté le 1er mars 2005

Disponible sur Internet le 4 mai 2005

Présenté par par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Le principe d'incertitude établit qu'une fonction non nulle et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être localisées simultanément. Ceci se traduit par exemple par des conditions sur le support E et le spectre $\widehat{E}$ de la fonction. Il est bien connu que ceux-ci ne peuvent être simultanément de mesure finie. Il est démontré dans Shubin et al. [Geom. Funct. Anal. 8 (1998) 932–964] qu'ils ne peuvent pas non plus être ε-minces. Nous donnons ici d'autres exemples d'ensembles E et $\widehat{E}$ pour lesquels on a cette propriété. Nous exprimons la rareté des ensembles considérés à partir d'un pavage dyadique de l'espace lié aux lignes de niveau de la fonction $|x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_d|^{\alpha_d}$. Ils ne sont pas ε-minces ni de mesure finie en général. Nous démontrons que les paires ainsi construites sont fortement annihilantes, suivant la terminologie du livre de Havin et Jöricke. ***Pour citer cet article : B. Demange, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Uncertainty inequalities associated to some homogenous functions. The uncertainty principle states that a nonzero function and its Fourier transform cannot be both sharply localized. It is well known that the support and the spectrum of a function cannot both have finite measure. In Shubin et al. [Geom. Funct. Anal. 8 (1998) 932–964], it is shown that they cannot be contained in ε-thin sets E and $\widehat{E}$. We give here other examples of sets E and $\widehat{E}$ having this property. The thinness of the sets is expressed in terms of a dyadic decomposition of the space, which is related to the functions $|x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_d|^{\alpha_d}$ on $\mathbb{R}^d$. These sets are not ε-thin in general. We prove that the pairs of sets we consider are strongly annihilating in the sense of Havin and Jöricke. ***To cite this article: B. Demange, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Adresse e-mail : bruno.demange@univ-orleans.fr (B. Demange).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.03.028

Abridged English version

A pair of measurable sets $(E, \widehat{E})$ of $\mathbb{R}^d$ is said to be strongly annihilating in the sense of [5] if there exists a constant $0 \leqslant c < 1$ such that for all $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, supported in E, we have $\int_{\widehat{E}} |\hat{f}|^2 \leqslant c\|f\|_{L^2}^2$. Pairs of sets of finite measure are strongly annihilating. So are the pairs of ε-thin sets, see [9]. Recall that a set E is ε-thin if $|E \cap B(x, \rho(x))| \leqslant \varepsilon |B(x, \rho(x))|$, for all $x \in \mathbb{R}^d$, with $\rho(x) = \min(1, |x|^{-1})$.

It is proved in [9,3] that the sets of the form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |xy| < \varepsilon\}$ are η-thin, with $\eta = \varepsilon \log(1/\varepsilon)$, if ε is small enough. We proved in [4,2] that the pair of sets $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |xy| < C\}$, with arbitrary C, are weakly annihilating. We will give here new strongly annihilating pairs of sets. They are constructed using a dyadic decomposition of the space adapted to the functions $|x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d|^{\alpha_d}$. These sets have infinite measure in general and are not necessarily ε-thin. The conditions we give here on the sets are invariant through the dilations $x \to (t_1 x_1, \ldots, t_d x_d)$, for $t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d} = 1$.

Statement of the results

We decompose the half-line of positive numbers into the union of the dyadic intervals $I_k(\gamma) = [\gamma^k, \gamma^{k+1}[$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma > 1$. For $k \in \mathbb{Z}^d$ and $\gamma_1, \ldots, \gamma_d > 1$, we consider the 'dyadic rectangles' $Q(k) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x_1| \in I_{k_1}(\gamma_1), \ldots, |x_d| \in I_{k_d}(\gamma_d)\}$, which form a partition of the space $\mathbb{R}^d$, up to a finite union of strict subspaces. Denote by $|k|$ the quantity $k_1 + \cdots + k_d$.

Define, for $E, \widehat{E} \subset \mathbb{R}^d$, the annihilating constant $A(E, \widehat{E})$ as the smallest constant A such that $\int_{\widehat{E}} |\widehat{f\chi_E}|^2 \leqslant A\|f\|_{L^2}^2$, for all $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, where χ denotes the indicator function. The pair $(E, \widehat{E})$ is by definition strongly annihilating if and only if $A(E, \widehat{E}) < 1$. Let $A(k, p) = A(E \cap Q(k), \widehat{E} \cap Q(p))$. We prove the following result.

Theorem 0.1. *Let $\gamma_1, \ldots, \gamma_d > 1$. There exists a constant $K(\gamma, d)$, depending only on the γ_i and d, such that for all measurable subsets E and $\widehat{E}$ of $\mathbb{R}^d$,*

$$A(E, \widehat{E}) \leqslant K(\alpha, d) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \Bigl(\sup_{|k|=m,\ |p|=n} A(k, p) \Bigr) \bigl(1 + |n|\bigr)^{2(d-1)} \bigl(1 + |m|\bigr)^{2(d-1)}.$$

The proof is based on the following elementary estimate.

Lemma 0.2. *Let $\gamma_1, \ldots, \gamma_d > 1$. There exists a constant $K(\gamma)$ such that, for all $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^l, |k|=n} \min(1, \gamma_1^{k_1}) \cdots \min(1, \gamma_d^{k_d}) \leqslant K(\gamma) \bigl(1 + |n|\bigr)^{d-1}. \tag{1}$$

Corollaries and examples

As a consequence, the pairs of sets

$$E(\varepsilon) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^d;\ |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d|^{\alpha_d} < \varepsilon \bigr\} \tag{2}$$

form a strongly annihilating pair, provided ε is small enough. When $d = 2$, and $\alpha_1 = \alpha_2$, $E(\varepsilon)$ is η-annihilating with η comparable to $\varepsilon \log(1/\varepsilon)$, as proved in [9,3]. If α_1 and α_2 are arbitrary, this is a consequence of the results of [6]. When $d \geqslant 3$, this is not a consequence of these results.

As a corollary we get the following Heisenberg-type inequality.

Corollary 0.3. *Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_d > 0$. There exists a constant $K(\alpha) > 0$ such that for all $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d|^{\alpha_d} \bigl|f(x)\bigr|^2 \,\mathrm{d}x \times \int_{\mathbb{R}^d} |\xi_1|^{\alpha_1} \cdots |\xi_d|^{\alpha_d} \bigl|\hat{f}(\xi)\bigr|^2 \,\mathrm{d}\xi \geqslant K(\alpha) \|f\|_{L^2}^4. \tag{3}$$

Proof of the Corollary 0.3. Using standard dilation arguments, we see that (3) is equivalent to

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_d|^{\alpha_d}\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^d} |\xi_1|^{\alpha_1}\cdots|\xi_d|^{\alpha_d}\left|\hat f(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi \geqslant 2K(\alpha)\|f\|_{L^2}^2.$$

Let ε be small enough. The pair $(E(\varepsilon), E(\varepsilon))$ given by (2) is strongly annihilating, hence

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_d|^{\alpha_d}\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^d} |\xi_1|^{\alpha_1}\cdots|\xi_d|^{\alpha_d}\left|\hat f(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi$$
$$\geqslant \varepsilon\biggl(\int_{\mathbb{R}^d\setminus E(\varepsilon)}\left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^d\setminus E(\varepsilon)}\left|\hat f(\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi\biggr)\geqslant \varepsilon C(\alpha,\varepsilon)\|f\|_{L^2}^2,$$

where the last inequality comes from the definition of strongly annihilating pairs (see [5]). □

1. Introduction

La paire $(E,\widehat{E})$ de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ est dite faiblement annihilante si toute fonction f de $L^2(\mathbb{R}^d)$ à support dans E et à spectre dans $\widehat{E}$, est identiquement nulle, cf. [5]. La paire est dite fortement annihilante s'il existe $c\in[0,1[$ telle que, pour toute fonction $f\in L^2$ à support dans E,

$$\int_{\widehat{E}}|\hat f|^2\leqslant c\|f\|_{L^2}^2.$$

Une telle inégalité exprime de manière quantitative le fait que le spectre de f ne peut pas être contenu dans $\widehat{E}$. Les paires d'ensembles de mesure finie sont fortement annihilantes, voir [1]. Dans [9], les auteurs démontrent que les paires d'ensembles ε-minces sont également fortement annihilantes pour ε assez petit. Rappelons que $E\subset\mathbb{R}^d$ est ε-mince si $|E\cap B(x,\rho(x))|\leqslant\varepsilon|B(x,\rho(x))|$, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, avec $\rho(x)=\min(1,|x|^{-1})$. Cette condition est invariante par rotation.

Il est démontré dans [9,3] que les ensembles $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |xy|\leqslant\varepsilon\}$ sont η-minces, avec η de l'ordre de $\varepsilon\log(1/\varepsilon)$, si ε est assez petit. Dans [4,2], nous avons démontré par des méthodes d'analyse complexe que les paires d'ensembles du type $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ |xy|\leqslant C\}$ sont faiblement annihilantes pour C arbitraire. Nous allons donner ici d'autres paires d'ensembles fortement annihilantes liées aux lignes de niveau des fonctions $|x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_d|^{\alpha_d}$ sur $\mathbb{R}^d$. La minceur de ces ensembles va être exprimée à l'aide d'une décomposition dyadique de l'espace adaptée à la géométrie des lignes de niveau de cette fonction. Les conditions données vont être invariantes par les dilatations $x\to(t_1x_1,\ldots,t_dx_d)$, avec $t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}=1$.

Nous allons maintenant définir le pavage dyadique utilisé, et énoncer le résultat en toutes dimensions. Nous effectuons la démonstration dans le cas de $\mathbb{R}^2$ dans la section suivante, et nous terminerons par des exemples d'utilisation du résultat.

2. Pavage de l'espace et énoncé du résultat

Soient $\gamma>1$. La demi-droite $\mathbb{R}_+^*$ se subdivse en intervalles dyadiques $I_k(\gamma)$, $k\in\mathbb{Z}$, définis par

$$I_k(\gamma)=[\gamma^k,\gamma^{k+1}[.$$

Soient $\gamma_1,\ldots,\gamma_d>1$. On considère une décomposition dyadique de $\mathbb{R}^d$ en ensembles $Q(k)$, $k\in\mathbb{Z}^d$, de la forme

$$Q(k)=\bigl\{x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d;\ |x_1|\in I_{k_1}(\gamma_1),\ldots,|x_d|\in I_{k_d}(\gamma_d)\bigr\}.$$

La famille $(Q(k))_{k\in\mathbb{Z}^d}$ forme une partition de $\mathbb{R}^d$, privé d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stricts. On utilisera la notation $|k| := k_1 + \cdots + k_d$.

Définition 2.1. Soient $E, \widehat{E} \subset \mathbb{R}^d$. On définit la constante d'annihilation par

$$A(E,\widehat{E}) = \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \int_{\widehat{E}} \left|\widehat{f\chi_E}\right|^2.$$

Ici χ désigne la fonction indicatrice. Par définition, une paire $(E,\widehat{E})$ est fortement annihilante si et seulement si $A(E,\widehat{E}) < 1$. Remarquons que $A(E,\widehat{E}) < 1$ si et seulement si $A(\widehat{E},E) < 1$.

Proposition 2.2. *Soient $\gamma_1,\ldots,\gamma_d > 1$. Il existe une constante $C(\gamma,d)$ ne dépendant que des γ_i et de d, telle que pour toute paire d'ensembles mesurables $(E,\widehat{E})$,*

$$A(E,\widehat{E}) \leqslant C(\gamma,d) \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \Bigl(\sup_{|k|=m,\ |p|=m} A\bigl(E\cap Q(k),\widehat{E}\cap Q(p)\bigr)\Bigr)\bigl(1+|n|\bigr)^{2(d-1)}\bigl(1+|m|\bigr)^{2(d-1)}. \tag{4}$$

Soient E et $\widehat{E}$ deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$. Soit D une droite de $\mathbb{R}^d$. Soit L la mesure du projeté orthogonal de E sur D, et $\hat{L}$ celle de $\widehat{E}$ sur D. Il est classique que $A(E,\hat{E}) \leqslant L\hat{L}$. On sait aussi que $A(E,\widehat{E}) \leqslant \min(1,|E||\widehat{E}|)$. Désignons par $\rho(E,\widehat{E})$ l'infimum de ces produits $L\hat{L}$, lorsque D varie, et de $\min(1,|E||\widehat{E}|)$.

Théorème 2.3. *Soient E et $\widehat{E}$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}^d$. Si la somme*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \Bigl(\sup_{|k|=m,\ |p|=m} \rho\bigl(E\cap Q(k),\widehat{E}\cap Q(p)\bigr)\Bigr)\bigl(1+|n|\bigr)^{2(d-1)}\bigl(1+|m|\bigr)^{2(d-1)}$$

est assez petite, alors la paire $(E,\widehat{E})$ est fortement annihilante.

Remarque 1. On a $\rho(E\cap Q(k),\widehat{E}\cap Q(p)) \leqslant \min(1,\gamma_1^{k_1+p_1},\ldots,\gamma_d^{k_d+p_d})$. Si $|E\cap Q(k)| = |\widehat{E}\cap Q(p)| = 0$ pour $|k|,|p| \geqslant n_0$, avec n_0 suffisamment petit négativement, la paire $(E,\widehat{E})$ est donc fortement annihilante.

Remarque 2. Si L et $\hat{L}$ sont comme ci-dessus, Nazarov a démontré dans [8] l'estimation $A(E,\widehat{E}) \leqslant 1 - \exp(-C|L||\hat{L}|)$. Nous renvoyons à [7] pour d'autres estimations de ce type.

3. Esquisse de démonstration

Nous effectuons la démonstration pour $d = 2$. Elle repose sur deux lemmes.

Lemme 3.1. *Soient $\gamma_1,\gamma_2 > 1$. Il existe une constante $K(\gamma_1,\gamma_2)$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2;\ k_1+k_2=n} \min(1,\gamma_1^{k_1})\min(1,\gamma_2^{k_2}) \leqslant K(\gamma_1,\gamma_2)\bigl(1+|n|\bigr).$$

Démonstration du Lemme 3.1. Soit $\gamma = \min(\gamma_1,\gamma_2)$. Il suffit d'écrire

$$\sum_{k_1+k_2=n} \gamma_1^{\min(0,k_1)}\gamma_2^{\min(0,k_2)} \leqslant \sum_{k_1+k_2=n} \gamma^{\min(0,k_1)+\min(0,k_2)} = \sum_{k\geqslant 0} \gamma^{-k} c(k),$$

où $c(k)$ est le nombre de couples $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $k_1+k_2=n$ et $\min(0,k_1)+\min(0,k_2) = -k$. On a $c(k) = \mathrm{O}(1+|2k+n|)$. $\square$

Lemme 3.2. *Soit f une fonction de L^2 à support dans E. Soit f_k la restriction de f à $Q(k)$. On a*

$$\left|\int_{\widehat{E}\cap Q(p)} \hat{f}_k \overline{\hat{f}_{k'}}\right| \leqslant CA\big(E\cap Q(k), \widehat{E}\cap Q(p)\big)\big[\min(1,\gamma_1^{p_1+k'_1})\min(1,\gamma_2^{p_2+k'_2})\big]^{1/2}\|f_k\|_{L^2}\|f_{k'}\|_{L^2}.$$

Démonstration du Lemme 3.2. Soit ϕ une fonction C^∞ à support compact, valant 1 sur le carré $[1,\gamma_1]\times[1,\gamma_2]$. Soit $\phi_p(\xi_1,\xi_2)=\phi(\gamma_1^{-p_1}\xi_1,\gamma_2^{-p_2}\xi_2)$. On définit aussi la fonction $f_{k,p}$ par $\widehat{f_{k,p}}=\chi_{\widehat{E}\cap Q(p)}\widehat{f_k}$. Dans la suite, C désigne une constante susceptible de varier d'une ligne à l'autre. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\widehat{E}\cap Q(p)} \hat{f}_k \overline{\hat{f}_{k'}}\right| &= \left|\int \phi_p \hat{f}_{k,p}\overline{\hat{f}_{k'}}\right| = \left|\int\int \widehat{\phi_p}(x-x')f_{k,p}(x)\overline{f_{k'}(x')}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\right| \\ &\leqslant \|\widehat{\phi_p}\|_{L^1}^{1/2}\int \big|f_{k'}(x')\big|\left(\int\big|\widehat{\phi_p}(x-x')\big|\big|f_{k,p}(x)\big|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\mathrm{d}x' \\ &\leqslant C\sup_x\left(\int_{Q(k')}\big|\widehat{\phi_p}(x-x')\big|\,\mathrm{d}x'\right)^{1/2}\|f_{k,p}\|_{L^2}\|f_{k'}\|_{L_2}.\end{aligned}$$

Comme $|\hat{\phi}(x)|\leqslant C(1+|x_1|)^{-2}(1+|x_2|)^{-2}$, on voit que

$$\int_{Q(k')}\big|\widehat{\phi_p}(x-x')\big|\,\mathrm{d}x' \leqslant C\min(1,\gamma_1^{p_1+k'_1})\min(1,\gamma_2^{p_2+k'_2}).$$

On conclut en remarquant que par définition de A, $\|f_{k,p}\|_{L^2}^2\leqslant A(E\cap Q(k),\widehat{E}\cap Q(p))\|f_k\|_{L^2}^2$. □

Démonstration du Théorème 2.3. Soit f une fonction supportée dans E. Décomposons une telle fonction en une somme $f=\sum_k f_k$, avec f_k à support dans $E\cap Q(k)$. Soit $A(k,p)=A(E\cap Q(k),\widehat{E}\cap Q(p))$, et

$$\Lambda(p,k,k')=\big[\min(1,\gamma_1^{p_1+k'_1})\min(1,\gamma_2^{p_2+k'_2})\min(1,\gamma_1^{p_1+k_1})\min(1,\gamma_2^{p_2+k_2})\big]^{1/4}.$$

Le Lemme 3.2 implique que

$$\left|\int_{\widehat{E}\cap Q(p)} \hat{f}_k \overline{\hat{f}_{k'}}\right| \leqslant C\big[A(k,p)A(k',p)\big]^{1/2}\Lambda(p,k,k')\|f_k\|_{L^2}\|f_{k'}\|_{L^2}.$$

On aura donc (4), en appliquant le lemme de Schur, si l'on démontre que

$$\sup_{k'}\sum_{p,k}A(k,p)\frac{1+|k|}{1+|k'|}\Lambda(p,k,k')\leqslant C(\gamma,d)\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\sup_{|k|=m,\ |p|=n}A(k,p)\big(1+|n|\big)^2\big(1+|m|\big)^2.$$

Cela découle du Lemme 3.1. □

3.1. Application

Soit $\varepsilon>0$, $\alpha_1,\dots,\alpha_d>0$, et

$$E=\widehat{E}=\big\{x\in\mathbb{R}^d;\ |x_1|^{\alpha_1}\times\cdots\times|x_d|^{\alpha_d}<\varepsilon\big\}. \tag{5}$$

Soit $\gamma_i=2^{1/\alpha_i}$. D'après la Remarque 1, le membre de droite de (4) est en $O(\varepsilon^\nu)$ avec $\nu=\nu(\alpha)>0$. Donc la paire $(E,\widehat{E})$ est fortement annihilante si ε est suffisamment petit. Si ε est arbitraire, ces paires sont faiblement annihilantes. En effet le résultat suivant s'applique (voir [2]) :

Proposition 3.3. *Soient $E, \widehat{E} \subset \mathbb{R}^d$. Si pour presque tout point x de $\mathbb{R}^d$, et pour tout $\delta > 0$, les ensembles E et $\widehat{E}$ contiennent un nombre fini de points du réseau $x + \delta\mathbb{Z}^d$, alors la paire $(E, \widehat{E})$ est faiblement annihilante.*

Quand $d = 2$, et $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, ces ensembles E et $\hat{E}$ sont η-minces, pour η de l'ordre de $\varepsilon \log(1/\varepsilon)$, et on retrouve les résultats de [9]. Plus généralement, il découle de [6] que toutes les paires du type (5), avec $d = 2$, sont des paires fortement annihilantes.

Si $d \geqslant 3$, les ensembles $E = \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x_1| \times \cdots \times |x_d| < \varepsilon\}$ ne sont η-minces pour aucune valeur de η. On ne peut pas non plus leur appliquer les résultats de [6]. Plus généralement, il découle du Théorème 2.3 et de la Proposition 2.2 que les ensembles du type $E = \widehat{E} = \{x \in \mathbb{R}^d; |x_1| \times \cdots \times |x_d| \in I\}$, avec $I = \bigcup_{n \geqslant 0} [2^n, 2^n + \varepsilon 2^{\tau n}] \cup [0, \varepsilon]$, $\tau < 1/2$ et ε assez petit, forment une paire fortement annihilante. Quand $d = 2$, et $\tau < 0$, ceci découle de [9]. En effet, les paires d'ensembles du type $\{x \in \mathbb{R}^2;\ |x_1||x_2| \in I\}$, où $I \subset \mathbb{R}_+$ est de mesure finie assez petite, sont fortement annihilantes.

Nous obtenons comme corollaire toute une famille d'inégalités de type Heisenberg (voir aussi [3]). Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_d > 0$. Il existe $C(\alpha) > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d|^{\alpha_d} \left| f(x) \right|^2 \mathrm{d}x \times \int_{\mathbb{R}^d} |\xi_1|^{\alpha_1} \cdots |\xi_d|^{\alpha_d} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi \geqslant C(\alpha) \|f\|_{L^2}^4.$$

Remarque 3. Quand $\alpha_i = 2n_i \in 2\mathbb{N}$, on peut interpréter cette inégalité comme l'existence d'un trou spectral pour l'opérateur différentiel

$$L_n = |x_1|^{2n_1} \cdots |x_l|^{2n_d} + \left(-\frac{1}{4\pi^2} \partial_{x_1^2} \right)^{n_1} \cdots \left(-\frac{1}{4\pi^2} \partial_{x_d^2} \right)^{n_d}.$$

Le Théorème 2.3 se généralise dans un cadre plus général, où l'on utilise la décomposition dyadique donnée par des parallèlépipèdes

$$Q(k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d;\ \gamma_I^{k_i} \leqslant \left| l_i(x) \right| < \gamma_i^{k_i+1} \right\}, \qquad Q'(k) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d;\ \gamma_i^{k_i} \leqslant \left| l_i'(x) \right| < \gamma_i^{k_i+1} \right\}$$

pour les variables d'espace et de fréquence, où $(l_1, \ldots, l_d)$ et $(l_1', \ldots, l_d')$ sont deux familles de formes linéaires indépendantes. Ainsi les paires $(E, \widehat{E})$, avec

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^d;\ \left| l_1(x) \right| \cdots \left| l_d(x) \right| < \varepsilon \right\}, \qquad \hat{E} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d;\ \left| l_1'(\xi) \right| \cdots \left| l_d'(\xi) \right| < \hat{\varepsilon} \right\},$$

sont fortement annihilantes si le produit $\varepsilon\hat{\varepsilon}$ est assez petit, ce qui conduit à d'autres formes d'inégalités de Heisenberg.

Références

[1] W.O. Amrein, A.M. Berthier, On support properties of L^p-functions and their Fourier transforms, J. Funct. Anal. 24 3 (1977) 258–267.

[2] A. Bonami, B. Demange, A Survey on the Uncertainty Principles for Quadratic Forms, Compte-rendu de conférence, accepté.

[3] B. Demange, Uncertainty Principles for the Ambiguity function, soumis.

[4] B. Demange, Principes d'Incertitude associés à des formes quadratiques son des paires non dégénérées, Thèse, université d'Orléans, 2004.

[5] V. Havin, B. Jöricke, The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[6] O. Kovrizhkin, The Uncertainty Principle for certain densities, Int. Math. Res. Notices 17 (2003) 933–951.

[7] O. Kovrizhkin, Some results related to the Logvinenko–Sereda theorem, Proc. Amer. Soc. 129 (10) (2001) 3037–3047.

[8] F. Nazarov, Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the Uncertainty Principle type, Algebra i Analiz 5 (4) (1993) 3–66. Translated in St. Petersburg Math. J. 5 (4) (1994) 663–717.

[9] C. Shubin, R. Vakilian, T. Wolff, Some harmonic analysis questions suggested by Anderson–Bernoulli models, Geom. Funct. Anal. 8 (1998) 932–964.