Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 659–664
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Systèmes de réaction–diffusion sans propriété de Fredholm

Arnaud Ducrot [a], Martine Marion [a], Vitaly Volpert [b]

[a] *Laboratoire de mathématiques appliquées, UMR 5585 CNRS, École centrale de Lyon, 69134 Ecully, France*
[b] *Laboratoire de mathématiques appliquées, UMR 5585 CNRS, université Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France*

Reçu et accepté 28 février 2005

Disponible sur Internet le 26 avril 2005

Présenté par Haïm Brezis

Résumé

Nous nous intéressons à des systèmes elliptiques semi-linéaires dans des cylindres infinis pour lesquels le vecteur des termes non linéaires a des composantes linéairement dépendantes. De tels systèmes interviennent en théorie de la combustion par exemple et les opérateurs associés ne satisfont pas la propriété de Fredholm. L'objet de ce travail est de développer de nouvelles méthodes permettant l'étude de ces problèmes. Nous substituons au système initial une équation intégro-différentielle pour laquelle il est possible de démontrer la propriété de Fredholm et de construire le degré topologique. Ces outils sont ensuite appliqués à l'étude de l'existence d'ondes progressives ou à celle des bifurcations. ***Pour citer cet article : A. Ducrot et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Reaction–diffusion systems without the Fredholm property. We are interested in semi-linear elliptic systems in an infinite cylinder in the case where the components of the nonlinearity vector are linearly dependent. Such systems arise in particular in combustion theory. They do not satisfy the Fredholm property, and the conventional methods of nonlinear analysis are not applicable. The aim of this work is to develop new methods of analysis to study these problems. They are based on the introduction of integro-differential equations for which we prove the Fredholm property and construct the topological degree. These tools are applied to study existence of travelling waves and bifurcations of solutions. ***To cite this article: A. Ducrot et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Adresses e-mail : Arnaud.Ducrot@ec-lyon.fr (A. Ducrot), Martine.Marion@ec-lyon.fr (M. Marion), Volpert@maply.univ-lyon1.fr (V. Volpert).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2005.03.007

Abridged English version

In this Note we are interested in semi-linear elliptic problems of the form

$$-\Delta\theta + \alpha(y)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \kappa(\theta,\psi) = 0, \tag{1}$$

$$-\Lambda\Delta\psi + \alpha(y)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa(\theta,\psi) = 0 \tag{2}$$

in the infinite cylinder $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1},\ y \in \omega\}$, where ω is a regular open bounded subset of $\mathbb{R}^d$ with $d = 1$ or 2. This system is supplemented by the conditions

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{3}$$

$$\theta(-\infty, y) = 0, \quad \psi(-\infty, y) = 1, \quad \theta(+\infty, y) = 1, \quad \psi(+\infty, y) = 0 \quad \text{for } y \in \omega. \tag{4}$$

Systems of this type arise in the theory of combustion and describe propagation of flames. There θ is the dimensionless temperature, ψ the concentration of the reactant, Λ the inverse of the Lewis number, $\kappa(\theta,\psi)$ the reaction rate and $\alpha(y)$ a velocity field in the direction of the axis of the cylinder.

For $\Lambda = 1$ this system can be reduced to a single equation, which has been extensively studied [1–5,7]. In the case $\Lambda \neq 1$ the operator associated to these equations does not satisfy the Fredholm property. As a consequence the classical methods like the topological degree or the implicit function theorem can not be directly applied.

The aim of this work is to develop new methods of analysis for such problems. For that purpose let us introduce the function $H = \theta + \psi - 1$. It satisfies the problem

$$-\Delta H + \alpha(y)\frac{\partial H}{\partial x} = (\Lambda - 1)\Delta(v + \phi), \quad H(\pm\infty, y) = 0 \quad \text{for } y \in \omega, \quad \frac{\partial H}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{5}$$

where we have set $\psi = v + \phi$ and $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is some regular function having the same limits at infinity as ψ. Next we introduce

$$E = \left\{ w \in H^2(\Omega),\ \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0,\ \text{on } \partial\Omega \right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{O} = \left\{ \alpha \in C^0(\overline{\omega}),\ \int_\omega \alpha(y)\,\mathrm{d}y \neq 0 \right\}. \tag{6}$$

We first solve Eq. (5) for any $\alpha \in \mathcal{O}$ and $v \in E$. This allows us to determine H as a function of v. Next system (1)–(4) becomes equivalent to the integro-differential equation

$$\begin{aligned} &-\Lambda\Delta(v + \phi) + \alpha(y)\frac{\partial(v + \phi)}{\partial x} + \kappa\big(1 - v - \phi + H(v), v + \phi\big) = 0, \quad v(\pm\infty, y) = 0 \quad \text{for } y \in \omega, \\ &\frac{\partial v}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

where H is given by the resolution of (5).

This approach allows us to obtain existence results for travelling waves. In that context the velocity field α depends on a real parameter c (wave speed) which is unknown and will be found together with the unknown function v. For simplicity we assume that α takes the form $\alpha(y) = c\gamma(y)$ where $\gamma \in C^0(\overline{\omega})$ is a nonnegative function

We also suppose that the function $\kappa : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is of the class C^2 and satisfies the conditions

$$\kappa(1, 0) = \kappa(0, 1) = 0, \quad g'(0) < 0, \quad g'(1) < 0 \quad \text{where } g(\psi) = \kappa(1 - \psi, \psi). \tag{8}$$

Theorem 0.1. *Suppose that the scalar equation corresponding to system* (1), (2) *with* $\alpha(y) = c\gamma(y)$ *and* $\Lambda = 1$ *has a solution* $(1 - \psi_0, \psi_0, c_0)$ *with* $c_0 > 0$. *Then under assumption* (8), *there exists* $\epsilon > 0$ *such that problem* (1)–(4) *has a solution* (θ, ψ, c) *for all* Λ *such that* $|\Lambda - 1| < \epsilon$.

The proof of this theorem is based on the implicit function theorem applied to problem (7).

Next we prove the Fredholm property and the existence of the topological degree for the integro-differential operator $\mathcal{A}$ associated to (7) with $\alpha(y) \equiv \alpha > 0$ constant. We make the following additional assumption on the function κ

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}(0,1) = \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}(1,0) = 0. \tag{9}$$

We introduce the weighted spaces $L^2_\mu(\Omega)$ and $E_\mu = \{w \in E, \mu w \in E\}$ with the weight function $\mu(x) = 1 + x^2$. Then we have the following result:

Theorem 0.2. *For any positive α and Λ, the operators $\mathcal{A} : E \to L^2(\Omega)$ and $\mathcal{A} : E_\mu \to L^2_\mu(\Omega)$ are bounded, satisfy the Fredholm property, and have the zero index. A topological degree can be constructed for the operator $\mathcal{A} : E_\mu \to L^2_\mu(\Omega)$.*

Remark 1. The Fredholm property for the operator $\mathcal{A}$ does not require the vector field α to be constant. We can use it to prove the existence of multi-dimensional travelling waves in the neighbourhood of a one-dimensional solution for some fixed $\Lambda \neq 1$.

Suppose now that system (1)–(4) depends on a parameter τ, that is $\Lambda = \Lambda(\tau)$ and $\kappa(\theta,\psi) = \kappa(\tau,\theta,\psi)$ with a C^1-dependence. We also suppose that problem (1)–(4) has a one-dimensional solution. Then we can state the following theorem:

Theorem 0.3. *For $\tau \neq \tau_0$ assume that the zero eigenvalue of problem* (1)–(4) *linearized about the one-dimensional solution is simple. Furthermore for $\tau = \tau_0$ assume that the zero eigenvalue has multiplicity two and that there exists an eigenvalue $\lambda(\tau)$ such that*

$$\lambda(\tau_0) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda(\tau_0)}{\mathrm{d}\tau} \neq 0. \tag{10}$$

Then $\tau = \tau_0$ is a bifurcation point.

1. Introduction

Nous étudions dans cette Note des systèmes elliptiques semi-linéaires de la forme (1), (2), dans un cylindre $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1},\ y \in \omega\}$, où ω est un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $d = 1$ ou 2. Ce système est complété par les conditions (3) et (4).

Ce type de problème est lié à un modèle classique en théorie de la combustion, le modèle thermo-diffusif. Dans ces équations, θ représente la température normalisée, ψ la concentration du réactant, Λ l'inverse du nombre de Lewis, $\kappa(\theta,\psi)$ le taux de la réaction et enfin α est associé à un champ de vecteur parallèle à l'axe du cylindre.

Pour $\Lambda = 1$, le système (1)–(4) se réduit à une équation scalaire largement étudiée [1–5,7]. L'étude du système $\Lambda \neq 1$ est beaucoup plus délicate. En particulier l'opérateur associé à ce système n'est pas de Fredholm. On ne peut donc pas utiliser les résultats classiques d'analyse comme le théorème des fonctions implicites ou encore le degré topologique.

Le but de cette Note est d'étudier une re-formulation du système (1)–(4) en terme d'une équation intégro-différentielle, pour laquelle nous serons en mesure d'appliquer les résultats classiques. La formulation intégro-differentielle est explicitée dans la Section 2. Elle nous permet d'obtenir l'existence d'ondes progressives pour le système (1)–(4) et Λ voisin de 1.

Ensuite, nous étudions la propriété de Fredholm pour l'opérateur intégro-différentiel (Section 3). Plus précisément, on montre que l'opérateur est de Fredholm d'indice zéro. Les conditions de résolubilité sont déduites et utilisées pour construire des solutions pour $\Lambda \neq 1$ fixé au voisinage de solutions mono-dimensionelles.

Enfin, nous construisons le degré topologique pour l'opérateur intégro-différentiel (Section 4) et nous l'appliquons à l'étude des bifurcations de solutions.

2. Une formulation intégro-différentielle

Une propriété essentielle du système (1)–(4) est qu'une combinaison linéaire appropriée des équations (1) et (2) annulle les termes non linéaires. Plus précisément, posant $H = \theta + \psi - 1$, on voit aisément que le système (1)–(4) est équivalent à :

$$-\Lambda\Delta\psi + \alpha(y)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa(H + 1 - \psi, \psi) = 0, \tag{11}$$

$$-\Delta H + \alpha(y)\frac{\partial H}{\partial x} = (\Lambda - 1)\Delta\psi, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{\partial H}{\partial\nu} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{13}$$

$$\psi(-\infty, y) = 1, \quad H(-\infty, y) = 0, \quad \psi(+\infty, y) = 0, \quad H(+\infty, y) = 0 \quad \text{pour } y \in \omega. \tag{14}$$

Il est commode d'introduire l'inconnue translatée vérifiant des conditions homogènes à l'infini $v = \psi - \phi$, où $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière donnée satisfaisant $\phi(x) = 1$ si $x < -1$ et $\phi(x) = 0$ si $x > 1$.

Dans la suite nous allons considèrer H comme une fonction de v (et éventuellement de α et Λ). Cette fonction est définie par la résolution du problème

$$-\Delta H + \alpha(y)\frac{\partial H}{\partial x} = (\Lambda - 1)\Delta(v + \phi), \tag{15}$$

$$H(\pm\infty, y) = 0 \quad \text{pour } y \in \omega, \qquad \frac{\partial H}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{16}$$

Donnons d'abord un résultat d'existence et d'unicité pour ce problème.

Lemme 2.1. *Soit $v \in E$, $\alpha \in \mathcal{O}$ et $\Lambda > 0$ où E et $\mathcal{O}$ sont définis par* (6)*. Alors le problème* (15), (16) *admet une unique solution $H \in E$. De plus, on a les estimations suivantes* :

$$\begin{aligned} &\|H\|_{H^1} \leqslant |\Lambda - 1| M(\alpha) \big\|\nabla(v + \phi)\big\|_{L^2}, \\ &\|H\|_{H^2} \leqslant |\Lambda - 1| M(\alpha) \big(\big\|\nabla(v + \phi)\big\|_{L^2} + \big\|\Delta(v + \phi)\big\|_{L^2}\big), \end{aligned} \tag{17}$$

où M désigne une constante dépendant uniquement de α.

Ce lemme permet d'introduire l'opérateur $\mathcal{H}$ qui associe à $v \in E$ l'unique solution $H \in E$ du problème (15), (16). Le système (1)–(4) devient alors équivalent à l'équation :

$$\begin{aligned} &-\Lambda\Delta(v + \phi) + \alpha(y)\frac{\partial(v + \phi)}{\partial x} + \kappa\big(1 - v - \phi + \mathcal{H}(v), v + \phi\big) = 0, \\ &v(\pm\infty, y) = 0 \quad \text{pour } y \in \omega, \qquad \frac{\partial v}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{18}$$

Nous utilisons maintenant cette équation pour étudier l'existence d'ondes progressives. Ici, le champ de vitesse α dépend aussi d'un paramètre réel c (vitesse de l'onde). La vitesse c est un paramètre inconnu qui doit être trouvé en même temps que les fonctions θ et ψ, ou encore H et v.

Précisons les hypothèses. On suppose que la fonction $\kappa : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 et vérifie (8). On suppose aussi que

$$\begin{aligned}&\alpha = \alpha(c, y) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \times \overline{\omega} \text{ et admet une dérivée}\\ &\quad \text{partielle par rapport à } c \text{ qui est positive sur } \mathbb{R} \times \overline{\omega}\end{aligned} \tag{19}$$

Rappelons que pour $\Lambda = 1$ le système (1)–(4) est équivalent à une équation scalaire (on a $\theta = 1 - \psi$). Les résultats d'existence d'ondes progressives $(1 - \psi_0, \psi_0, c_0)$ sont alors bien connus [1–5,7].

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses* (8) *et* (19)*, on suppose que l'équation scalaire correspondant à* $\Lambda = 1$ *admet une solution* (ψ_0, c_0) *avec* $c_0 > 0$*. Alors, il existe* $\epsilon > 0$ *tel que si* Λ *vérifie* $|\Lambda - 1| < \epsilon$ *le problème* (1)–(4) *admet une solution* (θ, ψ, c)*. De plus, la solution dépend continûment de* Λ *dans* $C^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \times C^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$.

La preuve de ce théorème repose sur l'application du théorème des fonctions implicites à la fonction

$$\mathcal{B}(v, c, \Lambda) = -\Lambda\Delta(v + \phi) + \alpha(c, y)\frac{\partial(v + \phi)}{\partial x} + \kappa\bigl(1 - v - \phi + \mathcal{H}(v, c, \Lambda), v + \phi\bigr), \tag{20}$$

intervenant dans (18) au voisinage de $(v_0, c_0, 1)$ où $v_0 = \psi_0 - \phi$. L'étude de l'inversibilité de l'opérateur linéarisé utilise les conditions de résolubilité d'un opérateur classique de réaction–diffusion, qui est de Fredholm d'indice nul sous l'hypothèse (8).

3. Propriété de Fredholm

Dans cette section, nous étudions la propriété de Fredholm pour l'opérateur $\mathcal{A} : E \to L^2(\Omega)$ associé à l'équation intégro-différentielle (18), c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}(v) = -\Lambda\Delta(v + \phi) + \alpha(y)\frac{\partial(v + \phi)}{\partial x} + \kappa\bigl(1 - v - \phi + \mathcal{H}(v), v + \phi\bigr). \tag{21}$$

Nous supposons que la fonction κ satisfait (8) ainsi que l'hypothèse supplémentaire (9).

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses* (8) *et* (9)*, pour tout* $\Lambda > 0$ *et tout* $\alpha \in \mathcal{O}$*, l'opérateur* $\mathcal{A}$ *défini par* (21) *est de Fredholm d'indice nul sur* E.

Ce théorème nous donne en particulier les conditions de résolubilité pour l'opérateur linéarisé $\mathcal{A}'$. Ceci nous permet de prouver un résultat d'existence d'ondes progressives pour $\Lambda \neq 1$. Nous supposons que le champ de vitesse $\alpha(y)$ dépend du paramètre c (vitesse de l'onde) et s'écrit $c\gamma(y)$. Si $\gamma(y) \equiv 1$, le système correspondant

$$-\Delta\theta + c\frac{\partial\theta}{\partial x} - \kappa(\theta, \psi) = 0, \qquad -\Lambda\Delta\psi + c\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa(\theta, \psi) = 0 \tag{22}$$

associé aux conditions (3), (4) possède des solutions mono-dimensionnelles (θ_0, ψ_0, c_0) avec $c_0 > 0$. Le résultat suivant concerne l'existence d'ondes progressives pour $\alpha(y) = c\gamma(y)$ quand γ est « proche » de 1.

Théorème 3.2. *Soit* $\Lambda > 0$*,* $\Lambda \neq 1$*, fixé. Sous les conditions* (8) *et* (9)*, supposons que* (22) *possède une solution mono-dimensionnelle* (θ_0, ψ_0, c_0) *avec* $c_0 > 0$*. On suppose de plus que zéro est valeur propre simple du système* (22) *linéarisé en* (θ_0, ψ_0)*. Alors il existe* $\epsilon > 0$ *tel que si* $\gamma \in C^0(\overline{\omega})$ *vérifie* $\|\gamma - 1\|_\infty < \epsilon$*, le système* (1)–(4) (*avec* $\alpha(y) = c\gamma(y)$) *admet une solution* (θ, ψ, c).

Ce résultat se prouve en appliquant le théorème des fonctions implicites à l'opérateur défini dans (20) avec $\alpha(c, y) = c\gamma(y)$ que l'on considère maintenant comme une fonction de v, c et γ. L'inversibilité de l'opérateur linéarisé utilise les conditions de résolubilité de l'opérateur intégro-différentiel résultant du Théorème 3.1.

4. Degré topologique

Dans cette partie, nous construisons le degré topologique pour l'opérateur $\mathcal{A}$ dans le cas d'un champ de vitesse indépendant de y, c'est à dire $\alpha(y) \equiv \alpha > 0$. L'ouvert Ω étant non borné, il est nécessaire d'introduire les espaces à poids $L^2_\mu(\Omega)$ et $E_\mu = \{v \in E,\ \mu v \in E\}$ avec le poids $\mu(x) = 1 + x^2$. Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Pour tout réel $\alpha > 0$ et pour tout $\Lambda > 0$, l'opérateur $\mathcal{A}: E_\mu \to L^2_\mu(\Omega)$ est borné. De plus, sous les hypothèses* (8) *et* (9)*, cet opérateur agissant de E_μ à valeurs dans $L^2_\mu(\Omega)$ est de Fredholm d'indice nul. Enfin, on peut construire le degré topologique pour l'opérateur $\mathcal{A}: E_\mu \to L^2_\mu(\Omega)$.*

La preuve de la propriété de Fredholm dans les espaces à poids repose sur des estimations a priori pour l'opérateur $\mathcal{H}$ dans ces espaces. Ensuite, la construction du degré topologique suit la démarche introduite dans [6]. L'opérateur $\mathcal{A}$ est de Fredholm d'indice nul dans les espaces à poids et l'opérateur non linéaire est propre dans ces même espaces.

Le degré topologique construit ci-dessus peut être appliqué à l'étude des bifurcations. Rappelons ici que l'on ne peut pas étudier directement les bifurcations de solutions pour (1)–(4) car le spectre essentiel de l'opérateur linéarisé passe par zéro.

Considérons le système d'Éq. (1)–(4) dépendant d'un paramètre τ, c'est-à-dire $\Lambda = \Lambda(\tau)$ et $\kappa(\theta, \psi) = \kappa(\tau, \theta, \psi)$. Ici, α est un paramètre inconnu, la vitesse de l'onde. On suppose dans la suite que pour τ variant dans un certain intervalle, le système (1)–(4) possède une solution mono-dimensionnelle $(\theta_\tau, \psi_\tau, \alpha_\tau)$. Nous supposons aussi que les valeurs propres et fonctions propres du problème (1)–(4) linéarisé autour de la solution mono-dimensionnelle sont régulières par rapport au paramètre τ. On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Supposons que pour $\tau \neq \tau_0$, zéro est une valeur propre simple du problème* (1)–(4) *linéarisé autour de la solution mono-dimensionnelle. De plus, supposons que, pour $\tau = \tau_0$, zéro est une valeur propre de multiplicité deux et qu'il existe une valeur propre $\lambda(\tau)$ telle que*

$$\lambda(\tau_0) = 0, \qquad \frac{\lambda(\tau_0)}{d\tau} \neq 0. \tag{23}$$

Alors, $\tau = \tau_0$ est un point de bifurcation.

Notons que du fait de l'invariance des équations par rapport aux translations suivant l'axe du cylindre, zéro est toujours valeur propre du système linéarisé. Pour prouver le Théorème 1.4, on est donc amené à construire un sous-espace sur lequel, pour $\tau = \tau_0$, zéro est une valeur propre simple alors que, pour $\tau \neq \tau_0$, zéro n'est pas une valeur propre.

Références

[1] H. Berestycki, L. Nirenberg, Travelling fronts in cylinders, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 9 (1992) 497–572.

[2] M. Freidlin, in: M. Freidlin, S. Gredeskul, J. Hunter, A. Marchenko, L. Pastur (Eds.), Wave Front Propagation for KPP-Type Equations, in: Surveys Appl. Math., vol. 2, Plenum Press, New York, 1995, pp. 1–62.

[3] R. Gardner, Existence and stability of travelling wave solutions of competition models: a degree theoretic approach, J. Differential Equations 44 (1982) 343–364.

[4] S. Heinze, Traveling waves for semilinear parabolic partial differential equations in cylindrical domains, Preprint No. 506, Heidelberg, 1989, 46 p.

[5] J.M. Vega, Multidimensional traveling wavefronts in a model from combustion theory and in a related problems, Differential Integral Equations 6 (1993) 131–153.

[6] V. Volpert, A. Volpert, Properness and topological degree for general elliptic operators, Abstract Appl. Anal. 3 (2003) 129–181.

[7] A. Volpert, V. Volpert, Existence of multidimensional travelling waves and systems of waves, Comm. Partial Differential Equations 26 (2001) 421–459.