



Physique mathématique/Problèmes mathématiques de la mécanique

# Définition d'énergies d'interfaces à partir de modèles atomiques

Xavier Blanc <sup>a</sup>, Claude Le Bris <sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire J.-L. Lions, université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France*

<sup>b</sup> *CERMICS, École nationale des ponts et chaussées, Champs sur Marne, 77455 Marne-La-Vallée cedex, France*

Reçu le 16 décembre 2004 ; accepté après révision le 21 février 2005

Disponible sur Internet le 23 mars 2005

Présenté par Pierre-Louis Lions

---

## Résumé

Nous présentons dans cette Note une dérivation possible d'énergies mécaniques d'interfaces macroscopiques à partir de modèles atomistiques simples, comme des modèles d'interaction de paire. Pour ce faire, nous étendons tout d'abord un de nos résultats précédents sur la dérivation d'énergie en volume (voir Blanc et al. [Arch. Rational Mech. Anal. 164 (4) (2002) 341–381]), puis l'utilisons pour étudier dans le cas de l'interface la limite de l'énergie quand la distance inter-atomique tend vers zéro. **Pour citer cet article :** X. Blanc, C. Le Bris, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**A definition of interface energies using atomistic models.** We present here a possible derivation of interfacial energies from simple atomistic models, such as pair potential energies. In order to do so, we first extend the result of Blanc et al. [Arch. Rational Mech. Anal. 164 (4) (2002) 341–381], and then apply it to study in the case of an interface the limit of the energy as the atomic spacing goes to zero. **To cite this article:** X. Blanc, C. Le Bris, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

In the Mechanics literature, one can find many derivations of interfacial energies at the macroscopic level (see [4,6–8] and the references therein). These derivations are usually based on  $\Gamma$ -convergence techniques for models when an interfacial zone is squeezed, giving an interface in the limit.

In this Note, we derive the same kind of interfacial energies starting from atomistic models. We use pair potentials to define atomistic energies (although we believe more realistic models could be treated in the same way). Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  with  $d = 1, 2, 3$ , and assume that  $\Omega$  is partitioned in two subdomains  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ . We denote by  $\Gamma$  the

---

Adresses e-mail : [blanc@ann.jussieu.fr](mailto:blanc@ann.jussieu.fr) (X. Blanc), [lebris@cermics.enpc.fr](mailto:lebris@cermics.enpc.fr) (C. Le Bris).

frontier between  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , which is supposed to be smooth. We assume that in this reference configuration, the atoms lie on a periodic lattice of period  $\varepsilon$ , which is macroscopically small. We also assume that the interface  $\Gamma$  is ‘smeared out’, and has a width  $\gamma$ . Defining the energy of the configuration deformed by  $u$  (where  $u$  may have jumps only on  $\Gamma$ ), we define the energy (2), and study its limit under assumption (1).

Section 2 presents a preparatory work, that deals with the case when there is no interface, extending a preceding work [2] to less regular deformations  $u$  (Theorem 2.1 below).

Then, we study in Section 3 the limit of the energy. For this purpose, we make some assumptions on the deformation  $u$ , namely that  $u \in SBV(\Omega)$ , and that the Dirac part of  $\nabla u$  is supported by  $\Gamma$ . For the sake of clarity, we assume that  $\Gamma = \{x_3 = 0\} \cap \Omega$ , and that the interaction potential  $W_{12}$  is quadratic, see (8). Then, since we do not know the deformation in the smeared interface  $\Gamma_\gamma = \{x \in \Omega, |x_3| < \frac{\gamma}{2}\}$ , we define some energy by (9), (10) in the  $\Gamma$ -limit style. Under these assumptions, we show the convergence (11) (see Theorem 3.1). Note that in the case of small stiffness of the interface (i.e. when the potential (8) is multiplied by  $\gamma$ ), we have the same kind of convergence, see (12).

## 1. Introduction

Dans la littérature de mécanique (voir [4,6–8] et les références qui y sont citées), l’énergie d’une interface (surface de discontinuité de la structure du matériau vue au niveau macroscopique) est définie au seul niveau macroscopique. Les auteurs étudient en général la limite  $\gamma \rightarrow 0$  où  $\gamma$  est l’épaisseur d’une couche mince de matériau redonnant asymptotiquement l’interface, à l’aide de techniques de  $\Gamma$ -convergence.

Dans cette Note, nous dérivons de telles énergies d’interface (en fait, nous retrouvons les mêmes), mais à partir du niveau atomique. Nous nous limitons ici au cas où l’énergie est définie par des potentiels de paires. Bien que nous ne l’ayons pas encore fait, nous pensons que des modèles plus réalistes peuvent être traités avec les mêmes outils, cf l’étude menée dans la même veine dans [2]. Nous considérons un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) partitionné en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  délimités par une frontière régulière  $\Gamma$ . La donnée macroscopique est la déformation  $u$  que l’on suppose régulière (au sens où elle vérifie les hypothèses du Théorème 2.1 ci-dessous) dans  $\Omega_1$  d’une part et dans  $\Omega_2$  d’autre part, et qui peut avoir un saut à travers l’interface  $\Gamma$ . On désire définir l’énergie du matériau déformé au niveau atomique à l’aide de cette donnée. Pour cela, on admet (ceci une hypothèse discutable, à contrepied des techniques de  $\Gamma$ -limite) que chaque atome de  $X_i$  de  $\Omega$  est déplacé en  $u(X_i)$ . Les atomes de l’interface sont déplacés par une fonction  $w$  à déterminer.

On suppose que les atomes sont répartis périodiquement selon un réseau  $\ell$  unique, que l’on prend pour simplifier égal à  $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ , où  $\varepsilon$ , la distance interatomique, est destinée à tendre vers zéro. De plus, l’interface  $\Gamma$  est « épaisse », au sens où elle est supposé de taille  $\gamma > 0$ . Nous allons étudier la limite

$$\varepsilon \ll \gamma, \quad \varepsilon \longrightarrow 0, \quad \gamma \longrightarrow 0. \quad (1)$$

Pour décrire l’énergie de l’ensemble d’atomes constituant le solide, on utilise un potentiel d’interaction  $W_1 = W_0$  entre les atomes de  $\Omega_1$ , un potentiel d’interaction identique  $W_2 = W_0$  entre les atomes de  $\Omega_2$  (on pourrait aisément généraliser au cas de deux potentiels d’interaction distincts  $W_1 \neq W_2$ ), et un potentiel  $W_{12}$  dès qu’un atome de  $\Gamma_\gamma$  est impliqué dans l’interaction. Nous supposons de plus que chaque potentiel a pour longueur caractéristique d’interaction  $\varepsilon$ .

$$E_{\varepsilon,\gamma}(u) = \frac{1}{2N} \sum_{j \neq k \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Omega_1 \cap \Gamma_\gamma^c}{\varepsilon}} W_0 \left( \frac{u(\varepsilon k) - u(\varepsilon j)}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2N} \sum_{j \neq k \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Omega_2 \cap \Gamma_\gamma^c}{\varepsilon}} W_0 \left( \frac{u(\varepsilon k) - u(\varepsilon j)}{\varepsilon} \right) \\ + \frac{1}{2N} \sum_{j \neq k \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Gamma_\gamma}{\varepsilon}} W_{12} \left( \frac{u(\varepsilon k) - u(\varepsilon j)}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Gamma_\gamma}{\varepsilon}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Omega \cap \Gamma_\gamma^c}{\varepsilon}} W_{12} \left( \frac{u(\varepsilon k) - u(\varepsilon j)}{\varepsilon} \right). \quad (2)$$

Le nombre  $N$  vaut  $N = \#(\varepsilon\mathbb{Z}^d \cap \Omega) \approx \frac{|\Omega|}{\varepsilon^d}$ . Notre but est donc d'étudier la limite de cette énergie  $E_{\varepsilon,\gamma}$  dans l'hypothèse (1). Ce type de lien entre énergie atomique et énergie mécanique macroscopique a déjà été étudié dans [2] pour des déformations régulières. Comme nous nous attendons ici à avoir éventuellement des déformations singulières sur l'interface, nous commençons par étendre, dans la Section 2, les résultats de [2] à des cas moins réguliers. La Section 3 utilise ensuite ce résultat pour déterminer l'énergie d'interface dans la limite (1).

## 2. Extension des résultats de [2]

Nous nous intéressons momentanément dans cette section au cas où il n'y a pas d'interface :  $\Omega = \Omega_1$ , autrement dit  $\Omega_2 = \Gamma = \emptyset$ . Dans un tel cas, l'énergie (2) devient

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2N} \sum_{j \neq k \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{1}{\varepsilon}\Omega} W_0\left(\frac{u(\varepsilon k) - u(\varepsilon j)}{\varepsilon}\right), \tag{3}$$

où  $N = \#(\Omega \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d) \approx \frac{|\Omega|}{\varepsilon^d}$ . Nous allons démontrer :

**Théorème 2.1.** Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , avec  $p > d$ , vérifiant

$$|u(x) - u(y)| \geq \alpha|x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega. \tag{4}$$

Alors, si pour tout  $R > 0$ ,  $W_0$  est uniformément lipschitzien sur  $B_R^c$  et  $W_0 \in L^1(B_R^c)$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} W_0(\nabla u(x)k) dx. \tag{5}$$

**Remarque 1.** Notons que si  $u \in W^{1,p}$  avec  $p > d$ ,  $u$  est alors continue, donc (3) et (4) ont bien un sens.

**Remarque 2.** Notons que dans le cas très particulier de la dimension  $d = 1$ , le résultat est également vrai pour  $p = 1$ . En revanche, si  $d \geq 2$ , le cas  $p = d$  est exclu notamment car alors  $u$  n'est pas nécessairement continue, donc on ne sait pas définir (en l'état actuel de nos réflexions) l'énergie discrète  $E_\varepsilon(u)$ .

**Remarque 3.** Dans le même esprit, on peut remarquer qu'une condition naturelle est (au moins) que  $u \in W^{1,d}$ . En effet, le volume de la configuration déformée doit rester borné, ce qui correspond à  $\int |\det \nabla u|$  borné. Cette dernière propriété est vraie pour tout  $u \in W^{1,d}$ .

**Remarque 4.** Enfin, bien que nous ne le fassions pas ici, il semblerait raisonnable d'imposer à l'application réciproque  $u^{-1}$  les mêmes propriétés que  $u$ . En effet, la configuration déformée par  $u$  devrait pouvoir être prise comme configuration de référence. Ainsi,  $u^{-1}$  devrait vérifier en particulier la condition (4). Ceci correspondrait donc à l'hypothèse  $u \in W^{1,\infty}$ .

**Démonstration.** Par souci de clarté, nous ne traitons ici que le cas où  $W_0$  est à support compact :  $W_0(r) = 0$  si  $r > R$ . La démonstration qui suit s'adapte facilement au cas général.

Dans un tel cas, on sait (voir [2]) que si de plus  $u$  est  $C^2$ , alors (5) a lieu. Nous allons maintenant montrer que les énergies (3) et (5) sont en fait continues pour la norme  $W^{1,p}$  uniformément en  $\varepsilon$ . Comme d'autre part  $C^\infty(\Omega)$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , ceci démontrera (5). Le point de départ est l'inégalité suivante (voir par exemple [3]), où la constante  $C$  ne dépend pas de la taille du cube  $Q$  :

$$\forall u \in W^{1,p}(Q), \quad \forall x \neq y \in Q, \quad \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1-d/p}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(Q)}. \tag{6}$$

On utilise ensuite cette inégalité ainsi que (4) dans (3), et on obtient ( $w = u - v$  et  $Q$  est le cube unité :  $|Q| = 1$ ) :

$$\begin{aligned} |E_\varepsilon(u) - E_\varepsilon(v)| &\leq \frac{1}{2N} \sum_{0 < |k-j| \leq \frac{R}{\alpha}} \|W'_0\|_{L^\infty(\alpha, +\infty)} \frac{|u(\varepsilon k) - v(\varepsilon k) - u(\varepsilon j) + v(\varepsilon j)|}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{\|W'_0\|_{L^\infty(\alpha, +\infty)}}{2N} \sum_{0 < |k-j| \leq \frac{R}{\alpha}} \frac{|w(\varepsilon k) - w(\varepsilon j)|}{\varepsilon |k-j|} |k-j| \\ &\leq \frac{\|W'_0\|_{L^\infty(\alpha, +\infty)}}{2N} \left(\frac{2R}{\alpha}\right)^d \left(\frac{R}{\alpha}\right)^{1-d/p} \sum_j \frac{C}{\varepsilon^{d/p}} \left(\int_{\varepsilon j + \frac{\varepsilon}{\alpha} R Q} |\nabla w|^p\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite l’inégalité de Hölder discrète et le fait que  $N \approx \frac{|\Omega|}{\varepsilon^d}$  pour obtenir qu’il existe une constante  $C'$  indépendante de  $N$  (et donc de  $\varepsilon$ ) telle que

$$|E_\varepsilon(u) - E_\varepsilon(v)| \leq C' \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}.$$

### 3. Modèles de joints collés

Nous nous intéressons majoritairement dans cette section au cas d’un joint collé rigide (le cas d’un joint souple sera abordé à la fin). Plus précisément, nous reprenons les notations de l’introduction, et supposons  $W_{12}$  convexe par rapport à la variable  $|x|$ . Pour simplifier, nous supposons de plus que  $\Gamma = \{x \in \Omega, x_3 = 0\}$  (si  $d = 3$  ; sinon on remplace 3 par  $d$ ), et donc que  $\Gamma_\gamma = \{x \in \Omega, |x_3| < \frac{\gamma}{2}\}$  (voir Fig. 1).

En raison de la présence du joint en  $\Gamma$ , nous supposons que la déformation macroscopique  $u$  est moins régulière que dans la section précédente. Elle doit en particulier pouvoir « sauter microscopiquement » à travers  $\Gamma$  (nous définissons précisément ceci dans la formule (7)). Nous allons donc supposer que  $u \in SBV(\Omega)$ , autrement dit que  $\nabla u$  défini au sens des distributions est une mesure dont la partie Cantor est nulle. On sait qu’alors  $\nabla u$  s’écrit (voir par exemple [1] pour les détails)  $\nabla u = D_a u + (u^+ - u^-) \nu_u \delta_{S_u}$ , où  $D_a u$  est une fonction  $L^1$ , autrement dit une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,  $S_u$  est l’ensemble de saut de  $u$ , qui est rectifiable et de normale  $\nu_u$ , et sur lequel  $u$  admet une trace de part et d’autre, notées respectivement  $u^+$  et  $u^-$  ( $S_u$  étant orientée par  $\nu_u$ ). Nous supposerons donc en plus de cela que  $S_u = \Gamma = \{x_3 = 0\} \cap \Omega$ , donc  $\nu_u = e_3$ , que le saut de  $u$  est de taille  $\gamma : u^+ - u^- = \gamma \nu$ , où  $\nu$  est définie sur  $\Gamma$ , et enfin que  $D_a u \in L^p(\Omega)$  avec  $p > d$  (ou  $p = 1$  si  $d = 1$ ), de sorte que l’énergie discrète est bien définie. Ainsi,

$$\nabla u = D_a u + \gamma \nu \delta_\Gamma e_3. \tag{7}$$

Notons qu’ici, les données macroscopiques sont  $D_a u$  et le saut  $\nu \in L^\infty(\Gamma)$ , et que la fonction  $u$  définie par (7) va servir à définir une déformation microscopique (voir ci-dessous).

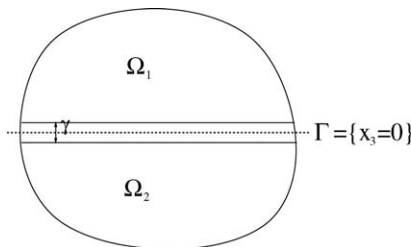


Fig. 1. Le solide  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  et l’interface épaissie  $\Gamma_\gamma$ .  
 Fig. 1. The solid  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  and the ‘smeared out’ interface  $\Gamma_\gamma$ .

Pour simplifier, nous supposons (notons que ce qui suit est généralisable à des cas plus réalistes) qu'un atome de l'interface interagit seulement avec ses plus proches voisins, et que le potentiel d'interaction dans  $\Gamma_\gamma$  est celui d'un oscillateur harmonique :

$$W_{12}(x) = \frac{1}{2}(|x| - 1)^2. \tag{8}$$

Ainsi, l'énergie s'écrit :

$$E_{\varepsilon,\gamma}(u) = \frac{1}{2N} \sum_{j \neq k \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Omega_1 \cap \Gamma_\gamma^c}{\varepsilon}} W_0\left(\frac{u(\varepsilon k) - u(\varepsilon j)}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2N} \sum_{j \neq k \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Omega_2 \cap \Gamma_\gamma^c}{\varepsilon}} W_0\left(\frac{u(\varepsilon k) - u(\varepsilon j)}{\varepsilon}\right) + I_{\gamma,\varepsilon}(u^+, u^-), \tag{9}$$

où  $I_{\gamma,\varepsilon}$  est définie par

$$I_{\gamma,\varepsilon}(u^+, u^-) = \inf \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Gamma_\gamma}{\varepsilon}, |j-k|=1} W_{12}\left(\frac{w(\varepsilon k) - w(\varepsilon j)}{\varepsilon}\right), w \in W^{1,p}(\Gamma_\gamma), \right. \\ \left. w = u^+ \text{ sur } \left\{x_3 = \frac{\gamma}{2}\right\}, w = u^- \text{ sur } \left\{x_3 = -\frac{\gamma}{2}\right\} \right\}. \tag{10}$$

Nous avons supposé ici que dans l'interface épaissie  $\Gamma_\gamma$ , la déformation inconnue  $w$  minimisait l'énergie élastique correspondant au joint. Ceci vient du fait qu'a priori on ne connaît pas  $u$  dans  $\Gamma_\gamma$ , et qu'une façon naturelle de l'exprimer en fonction de  $u^+$  et  $u^-$  est d'utiliser (10).

**Théorème 3.1.** *Nous supposons que  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $\Gamma_\gamma$  sont définis comme ci-dessus, et que (1) est vérifiée. Nous supposons de plus que  $u$  vérifie (7). Alors l'énergie  $E_{\varepsilon,\gamma}$  définie par (9)–(10) vérifie la propriété suivante à extraction d'une sous-suite près :*

$$E_{\varepsilon,\gamma}(u) = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} W_0(\nabla u(x)k) + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} W_0(\nabla u(x)k) + \frac{\gamma}{|\Omega|} \int_{\Gamma} W_{12}(v) + o(\gamma). \tag{11}$$

**Démonstration.** Les deux premiers termes de l'énergie (9) sont traités par le Théorème 2.1, et il reste à traiter le dernier terme. Nous avons alors, en notant  $\tilde{E}$  l'énergie qui définit  $I_{\gamma,\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{E}(w) &= \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Gamma_\gamma}{\varepsilon}} \sum_{|k-j|=1} W_{12}\left(\frac{w(\varepsilon k) - w(\varepsilon j)}{\varepsilon}\right) \\ &\geq \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Gamma_\gamma}{\varepsilon}} W_{12}\left(\frac{w(\varepsilon j + \varepsilon e_3) - w(\varepsilon j)}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{N} \frac{\gamma}{\varepsilon} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Gamma_\gamma}{\varepsilon}} W_{12}\left(\frac{w(\varepsilon j + \varepsilon e_3) - w(\varepsilon j)}{\varepsilon}\right) \\ &\geq \frac{1}{N} \frac{\gamma}{\varepsilon} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Gamma_\gamma}{\varepsilon}} W_{12}\left(\frac{u^+(\varepsilon j) - u^-(\varepsilon j)}{\gamma}\right) = \frac{\gamma}{\varepsilon N} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d \cap \frac{\Gamma_\gamma}{\varepsilon}} W_{12}(v(\varepsilon j)). \end{aligned}$$

Nous avons utilisé ci-dessus la convexité de  $W_{12}$  et sa positivité, ainsi que l'égalité  $\gamma v = (u^+ - u^-)$ . On remarque enfin que  $\frac{\gamma}{\varepsilon N} \approx \frac{\gamma \varepsilon^3}{\varepsilon |\Omega|} = \frac{\gamma \varepsilon^2}{|\Omega|}$  quand  $\varepsilon$  et  $\gamma$  tendent vers zéro, ce qui permet d'identifier la dernière somme comme une somme de Riemann et d'obtenir que

$$\liminf E_{\varepsilon,\gamma} \geq \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} W_0(\nabla u(x)k) + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} W_0(\nabla u(x)k) + \frac{\gamma}{|\Omega|} \int_{\Gamma} W_{12}(v).$$

Pour la limite supérieure, il suffit d'utiliser comme fonction test dans  $I_\gamma$  l'interpolée linéaire de  $u^+$  et  $u^-$  dans  $\Gamma_\gamma$ . Ceci traite le cas où  $v$  est régulière. On conclut ensuite par un argument de densité.

**Remarque 5.** Notons que la seule propriété fondamentale du potentiel  $W_{12}$  est ici sa convexité en  $|x|$ , et non le fait qu'il soit donné exactement par (8). On pourrait donc le remplacer sans aucun changement par n'importe quel potentiel convexe. Notons également que le fait d'avoir une interaction aux plus proches voisins n'est pas non plus limitante, et qu'on peut faire la même analyse dans le cas d'une interaction de portée finie quelconque.

Enfin, le théorème ci-dessus est aussi valable dans le cas d'un joint collé de faible rigidité. Dans un tel cas, le potentiel d'interaction  $W_{12}$  est remplacé par un potentiel identique « remis à l'échelle »  $\gamma$  :

$$W_{12}(x) = \frac{1}{\gamma} \tilde{W}_{12}(\gamma(|x| - 1) + 1).$$

Ceci correspond, dans le cas (8), à multiplier le potentiel  $W_{12}$  par  $\gamma$ . Dans un tel cas, on peut fixer la déformation macroscopique dans  $SBV(\Omega)$ , avec un saut à travers  $\Gamma$  indépendant de  $\gamma$ . L'hypothèse (7) devient donc  $\nabla u = D_a u + v \delta_\Gamma e_3$ . On a alors convergence de l'énergie vers une énergie similaire à (11) :

$$E_{\gamma,\varepsilon}(u) \longrightarrow \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} W_0(\nabla u(x)k) + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} W_0(\nabla u(x)k) + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} W_{12}(v). \quad (12)$$

Cette énergie est similaire à celles obtenues dans [4–8].

## Références

- [1] G. Alberti, C. Mantegazza, A note on the theory of SBV functions, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7) 11 (2) (1997) 375–382.
- [2] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, From molecular models to continuum mechanics, *Arch. Rational Mech. Anal.* 164 (4) (2002) 341–381.
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [4] G. Geymonat, F. Krasucki, S. Lenci, Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive, *Math. Mech. Solids* 4 (2) (1999) 201–225.
- [5] G. Geymonat, F. Krasucki, S. Lenci, Analyse asymptotique du comportement d'un assemblage collé, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 322 (1996) 1107–1112.
- [6] Ch. Licht, Comportement asymptotique d'une bande dissipative mince de faible rigidité, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 317 (1993) 429–433.
- [7] Ch. Licht, G. Michaille, Une modélisation du comportement d'un joint collé élastique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 322 (1996) 295–300.
- [8] F. Zaittouni, F. Lebon, Ch. Licht, Étude théorique et numérique du comportement d'un assemblage de plaques, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 359–364.