Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 315–318

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique/Probabilités

Influence asymptotique de la correction par la moyenne sur l'estimation d'un modèle AR(1) périodique

Antony Gautier

Université Lille 3, GREMARS, BP 149, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 28 juin 2004 ; accepté après révision le 23 décembre 2004

Disponible sur Internet le 25 janvier 2005

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Cette Note étudie l'influence asymptotique de la correction par la moyenne sur l'estimation par moindres carrés des paramètres d'un modèle AR(1) périodique. Contrairement au cas ARMA stationnaire, nous montrons que l'ajustement d'un modèle ARMA périodique avec constantes à la série observée peut être accompagné d'un gain substantiel en termes de précision asymptotique pour les estimateurs des moindres carrés par rapport à l'ajustement d'un modèle ARMA périodique sans constantes aux données corrigées par leur moyenne empirique. ***Pour citer cet article : A. Gautier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Asymptotic influence of mean-correction on estimating a periodic AR(1) model. This Note studies asymptotic influence of mean-correction on the parameter least squares estimation for a periodic AR(1) model. Unlike the stationary ARMA case, we show that fitting a periodic ARMA model with intercepts to the observed series can provide substantial gains in terms of asymptotic accuracy for the parameter least squares estimators compared with fitting a periodic ARMA model without intercepts to the mean-corrected series. ***To cite this article: A. Gautier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Présentés comme une alternative aux modèles ARIMA saisonniers, les modèles ARMA à coefficients périodiques (PARMA) ont connu un vif succès dans la littérature des séries temporelles. Cette Note s'intéresse à l'estimation d'un modèle AR(1) périodique et s'inscrit dans la continuité de Azrak et Mélard [1], Basawa et Lund [2] ou Bibi et Francq [3]. Une pratique courante en séries temporelles consiste à ajuster un modèle centré à la série

Adresse e-mail : antony.gautier@univ-lille3.fr (A. Gautier).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.01.004

des données corrigées par leur moyenne empirique. Dans ce contexte, l'objectif principal de la Note est de montrer que, contrairement au cas des modèles ARMA stationnaires, l'ajustement de modèles PARMA avec constantes aux données observées améliore la précision asymptotique de l'estimateur des moindres carrés (MC) par rapport à l'ajustement de modèles PARMA sans constantes aux données corrigées par leur moyenne empirique.

2. Modèle et hypothèses

Considérons une série temporelle journalière $(X_t)_{t=0,1,\ldots}$ présentant des changements de régime périodiques à des instants connus. De telles caractéristiques peuvent typiquement apparaître dans des séries macroéconomiques ou financières journalières (par exemple, la consommation d'électricité, la sécurité routière, les indices boursiers, la fréquentation ferroviaire etc.) pour lesquelles l'activité humaine est une source de périodicité hebdomadaire. On suppose que la date $t = 0$ correspond à un lundi et, pour simplifier la présentation, qu'il existe deux régimes distincts pour la série ; le premier régime correspondant aux lundis, mardis, mercredis, jeudis et vendredis, et le second régime correspondant aux samedis et dimanches. Notons $\Delta(1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, \ldots\}$ et $\Delta(2) = \{5, 6, 12, 13, \ldots\}$ l'ensemble des dates correspondant respectivement au régime 1 et au régime 2. La quantité $s_t = \mathbb{I}_{\Delta(1)}(t) + 2\mathbb{I}_{\Delta(2)}(t)$ indique le régime à la date t, où $\mathbb{I}_{\Delta(k)}(t)$ représente la fonction indicatrice de l'ensemble $\Delta(k)$. La suite $(s_t)_{t=0,1,\ldots}$ des régimes est connue, périodique et purement déterministe. Elle se compose de la séquence de régimes $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$ qui se répète de façon régulière.

On suppose que la dynamique de X_t est décrite par une équation AR(1) à coefficients périodiques

$$\begin{cases} X_0 = m_{0s_0} + \epsilon_0, \\ X_t - m_{0s_t} = a_{0s_t}(X_{t-1} - m_{0s_{t-1}}) + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1}$$

où le bruit $(\epsilon_t)_{t=0,1,\ldots}$ est iid tel que $E\epsilon_t = E\epsilon_t^3 = 0$, $E\epsilon_t^2 = 1$, $E\epsilon_t^4 < \infty$, et ϵ_t est indépendant de X_u, $u < t$. On a alors $EX_t = m_{0s_t}$. Le modèle (1) est un exemple PARMA choisi pour sa relative simplicité. La conclusion de la Note reste valable pour une classe plus générale de modèles PARMA(p, q) à d régimes, où $(p, q) \neq (1, 0)$ et $d \geqslant 2$. Le vecteur des paramètres inconnu de (1) est noté $\theta_0 = (m_{01}, m_{02}, a_{01}, a_{02})'$ et appartient à un sous-ensemble ouvert Θ de $\mathbb{R}^4$. On suppose que le module du produit des coefficients AR sur une période est inférieur à l'unité, i.e. $|a_{01}^5 a_{02}^2| = |\rho| < 1$, de telle sorte que l'équation (1) admette une solution non-anticipative et non-explosive (Vecchia [5]). Dans l'ensemble de la Note, k désigne un entier appartenant à $\{1, 2\}$ et toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

3. Estimation des paramètres

Etant donnée une suite d'observations $(X_0, \ldots, X_n)$ où, sans perte de généralité, on suppose que $n + 1$ est un entier multiple de la périodicité, le problème de l'estimation du paramètre d'intérêt θ_0 est étudié à partir de deux approches. Les preuves des résultats énoncés dans cette section se trouvent dans Gautier [4].

3.1. *Estimation de « première étape »*

L'approche de « première étape » (PE) consiste à estimer : (i) les paramètres de position m_{0k} par la moyenne empirique du régime k, (ii) les coefficients a_{0k} par l'estimateur usuel des MC basé sur les données corrigées par leur moyenne empirique. On définit ainsi les estimateurs de PE

$$\widetilde{m}_{nk} = \frac{\sum_{t=0}^n X_t \mathbb{I}_k(s_t)}{\sum_{t=0}^n \mathbb{I}_k(s_t)} \quad \text{et} \quad \tilde{a}_{nk} = \frac{\sum_{t=1}^n \{X_t - \widetilde{m}_{nk}\}\{X_{t-1} - \widetilde{m}_{ns_{t-1}}\}\mathbb{I}_k(s_t)}{\sum_{t=1}^n \{X_{t-1} - \widetilde{m}_{ns_{t-1}}\}^2 \mathbb{I}_k(s_t)}. \tag{2}$$

Afin d'étudier le comportement asymptotique de $\widetilde{m}_{nk}$, il est utile de considérer la représentation markovienne suivante :

$$\begin{cases} \underline{Y}_0 = \underline{u}_0, \\ \underline{Y}_t = A\underline{Y}_{t-1} + \underline{u}_t, \quad t = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{3}$$

où $\underline{Y}_t = (X_{7t} - m_{01}, X_{7t-1} - m_{02}, X_{7t-2} - m_{02}, X_{7t-3} - m_{01}, \ldots, X_{7t-6} - m_{01})'$, $\underline{Y}_0 = (X_0 - m_{01}, 0, \ldots, 0)'$, $\underline{u}_0 = (\epsilon_0, 0, \ldots, 0)'$, $\underline{u}_t$ est un bruit blanc et A est une matrice fonction des a_{0k} et dont le rayon spectral vaut $|\rho|$ (voir Gautier [4]). Sous la condition $|\rho| < 1$, le processus $(\underline{Y}_t)_{t=0,1,\ldots}$ est asymptotiquement stable et nous obtenons ainsi sa fonction d'autocovariance asymptotique, notée $\Gamma_{\underline{Y}}(h)$ pour $h \geqslant 0$. Introduisons les vecteurs $\underline{c}_1 = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)'$ et $\underline{c}_2 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)'$. Les théorème et corollaire suivants établissent le comportement asymptotique de $\widetilde{m}_{nk}$.

Théorème 3.1. *Considérons le modèle* (1) *pour lequel* $\widetilde{m}_{nk}$, *défini par* (2), *est un estimateur de* m_{0k}. *Si* $|\rho| < 1$, *alors* $\widetilde{m}_{nk} \xrightarrow{m.q.} m_{0k}$ *et* $\sqrt{n}(\widetilde{m}_{nk} - m_{0k}) \overset{\mathcal{L}}{\leadsto} \mathcal{N}(0, \xi_k^2 \pi_k^{-1})$ *quand* $n \to \infty$, *où* $\pi_k = n^{-1} \sum_{t=0}^{n} \mathbb{I}_k(s_t)$ *et*

$$\xi_k^2 = \left\{5\mathbb{I}_1(k) + 2\mathbb{I}_2(k)\right\}^{-1} \underline{c}_k' \left[\Gamma_{\underline{Y}}(0) + (1-\rho)^{-1}\left\{A\Gamma_{\underline{Y}}(0) + \Gamma_{\underline{Y}}(0)A'\right\}\right]\underline{c}_k.$$

Corollaire 3.2. *Sous la condition* $|\rho| < 1$, *la conclusion du Théorème* 3.1 *est vérifiée avec*

$$\begin{aligned}
\xi_1^2 = {} & 7\left\{25(\rho-1)^2\right\}^{-1}\left\{5 + 2a_{01}(4 + a_{02}^2) + a_{01}^2(10 + 4a_{02}^2 + a_{02}^4) + 2a_{01}^3(5 + 4a_{02}^2 + a_{02}^4)\right. \\
& + a_{01}^4(3 + 2a_{02}^2)^2 + 2a_{01}^5(3 + 4a_{02}^2 + 3a_{02}^4) + a_{01}^6(4 + 4a_{02}^2 + 7a_{02}^4) + 2a_{01}^7(1 + a_{02}^2 + 3a_{02}^4) \\
& \left. + a_{01}^8(1 + 4a_{02}^4) + a_{01}^2(1 + a_{02}^2)(1 + a_{01} + a_{01}^2 + a_{01}^3 + a_{01}^4)^2\right\}, \\
\xi_2^2 = {} & 7\left\{4(\rho-1)^2\right\}^{-1}\left\{2 + (1 + a_{01}^2 + a_{01}^4 + a_{01}^6 + a_{01}^8)(a_{02}^2 + 2a_{02}^3 + a_{02}^4) + 2a_{02}(1 + a_{01}^5) + a_{02}^2(1 + a_{01}^{10})\right\}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, Bibi et Francq [3] ont étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur des MC pour le modèle (1) avec $m_{0k} = 0$. Dans Gautier [4] (Théorème 3), on montre que, sous la condition $|\rho| < 1$, la variable $\sqrt{n}(\tilde{a}_{nk} - a_{0k})$ a une distribution asymptotique $\mathcal{N}(0, \Sigma^*)$, où la matrice Σ^* est donnée par Bibi et Francq [3] (sous-section 3.1).

3.2. Estimation par moindres carrés

Soient $\theta = \{\theta(1), \theta(2), \theta(3), \theta(4)\}' = (m_1, m_2, a_1, a_2)'$ un élément générique de Θ et Θ^* un sous-ensemble compact de Θ qui contient un voisinage de θ_0. On définit un estimateur des MC comme toute solution mesurable du problème de minimisation

$$\hat{\theta}_n = \arg\min_{\theta \in \Theta^*} Q_n(\theta), \qquad Q_n(\theta) = \frac{1}{2n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2(\theta), \tag{4}$$

où les erreurs de prévision sont données par $e_t(\theta) = X_t - m_{s_t} - a_{s_t}(X_{t-1} - m_{s_{t-1}})$. En pratique, le calcul de $\hat{\theta}_n$ requiert des algorithmes d'optimisation numérique, comme les méthodes de gradients ou celle du 'Downhill Simplex'. La procédure des MC nécessite aussi la spécification d'une valeur initiale pour θ : il est possible de prendre $0 \in \mathbb{R}^4$ ou l'estimateur de PE pour initialiser la procédure.

Le résultat ci-après donne le comportement asymptotique de $\hat{\theta}_n = (\widehat{m}_{n1}, \widehat{m}_{n2}, \hat{a}_{n1}, \hat{a}_{n2})'$.

Théorème 3.3. *Considérons le modèle* (1) *pour lequel* $\hat{\theta}_n$, *défini par* (4), *est un estimateur des MC de* θ_0. *Si* $|\rho| < 1$, *alors* $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p.s.} \theta_0$ *et* $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \overset{\mathcal{L}}{\leadsto} \mathcal{N}(0, \Sigma)$ *quand* $n \to \infty$, *où* $\Sigma = J^{-1}IJ^{-1}$ *avec* $I = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\{\sqrt{n}\,\partial Q_n(\theta_0)/\partial\theta\}$ *et* $J \overset{p.s.}{=} \lim_{n\to\infty} \partial^2 Q_n(\theta_0)/(\partial\theta\partial\theta')$.

La matrice de variance asymptotique Σ est bloc-diagonale, $\Sigma = \mathrm{Diag}\{\Sigma^{(11)}, \Sigma^{(22)}\}$ où $\Sigma^{(22)}$ est diagonale, et s'exprime en fonction des a_{0k} et π_k. Nous ne reportons pas dans cette Note les expressions des éléments de Σ pour des raisons de place.

3.3. Comparaison de la précision asymptotique

Notons $M_{i,j}$ l'élément de la i-ème ligne et de la j-ème colonne d'une matrice M. Le Théorème 3.4 montre que le gain de précision asymptotique pour l'estimateur des MC comparé à l'estimateur de PE porte sur l'estimation des paramètres de position.

Théorème 3.4. *Sous les hypothèses et les notations des Théorèmes* 3.1–3.3*, on a* $\Sigma^{(11)}_{k,k} \leqslant \xi_k^2 \pi_k^{-1}$ *et* $\Sigma^{(22)} = \Sigma^*$.

Remarque 1. Lorsque $m_{01} = m_{02}$ et $a_{01} = a_{02}$ (cas à un seul régime), les deux approches sont asymptotiquement équivalentes : on a $\Sigma^{(11)}_{k,k} = \xi_k^2 \pi_k^{-1}$, ce qui correspond bien au résultat escompté. Par contre, l'inégalité du Théorème 3.4 devient stricte dès que $a_{01} \neq a_{02}$.

Le gain de précision asymptotique pour l'estimation des paramètres de position peut être significatif. Par exemple, pour $\theta_0 = (1.0, 0.0, 0.9, -0.9)'$, on trouve $\xi_1^2 \pi_1^{-1} = 100.439$ et $\Sigma^{(11)}_{1,1} = 3.7838$, $\xi_2^2 \pi_2^{-1} = 1.6545$ et $\Sigma^{(11)}_{2,2} = 1.2915$. Cette différence de précision asymptotique entre les deux estimateurs peut s'expliquer par le fait que, pour les modèles ARMA à changements de régime périodiques, chaque régime possède de l'information utile aux autres régimes. Or, l'estimateur de PE $\widetilde{m}_{nk}$ fournit une estimation du paramètre m_{0k} basée uniquement sur les données relatives au régime k. Ainsi, seule une partie des observations est utilisée pour déterminer $\widetilde{m}_{nk}$ alors que le calcul de l'estimateur des MC $\widehat{m}_{nk}$ s'appuie sur l'ensemble des observations $(X_0, \ldots, X_n)$.

Remarque 2. Dans le cas où la variance des innovations du modèle (1) n'est pas constante (cas hétéroscédastique), l'estimateur des MC ne présente plus de propriétés d'optimalité au sens du Théorème 3.4. Il conviendrait alors de considérer d'autres estimateurs, de type MC quasi-généralisés ou maximum de vraisemblance, qui intègrent les paramètres de nuisance dans leur critère (voir Azrak et Mélard [1], Basawa et Lund [2] ou Bibi et Francq [3]).

Le lecteur peut trouver dans Gautier [4] le résultat d'expériences de Monte Carlo menées afin d'étudier le comportement des estimateurs à distance finie. Ces dernières confirment la théorie asymptotique énoncée dans cette Note et la suprématie de l'estimateur des MC en termes de précision asymptotique.

Références

[1] R. Azrak, G. Mélard, Asymptotic properties of quasi-likelihood estimators for ARMA models with time-dependent coefficients, document de travail, 2000.
[2] I.V. Basawa, R.B. Lund, Large sample properties of parameter estimates for periodic ARMA models, J. Time Ser. Anal. 22 (2001) 651–663.
[3] A. Bibi, C. Francq, Consistent and asymptotically normal estimators for cyclically time-dependent linear models, Ann. Inst. Statist. Math. 55 (2003) 41–68.
[4] A. Gautier, Asymptotic inefficiency of mean-correction on parameter estimation for a periodic first-order autoregressive model, document de travail, http://gremars.univ-lille3.fr/~gautier/gautier_parma.ps, 2004.
[5] A.V. Vecchia, Periodic autoregressive-moving average (PARMA) modeling with applications to water resources, Water Resources Bull. 21 (1985) 721–730.