Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 269–274
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Analyse à deux échelles d'une suite bornée de L^2 sur une sous-variété du cotangent

Clotilde Fermanian Kammerer

[a] *Université de Cergy-Pontoise, département de mathématiques, BP 222, Pontoise, 95302 Cergy-Pontoise cedex, France*

Reçu le 7 décembre 2004 ; accepté le 17 décembre 2004

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Dans cette Note on généralise les mesures de Wigner à deux échelles au cas de sous-variétés plus générales que les sous-variétés symplectiques ou involutives pour lesquelles elles ont été introduites. On s'intéresse à l'étude de la concentration d'une famille bornée de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur une sous-variété de l'espace cotangent $T^*\mathbb{R}^d$ telle que la forme symplectique restreinte au tangent à cette sous-variété est de rang constant. ***Pour citer cet article : C. Fermanian Kammerer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Two scale analysis of a bounded family in L^2 on a submanifold of the phase space. In this Note, we investigate the generalization of two-scale Wigner measure to the case of submanifolds more general than symplectic and involutive ones for which they have been defined. We study the concentration of a bounded family in $L^2(\mathbb{R}^d)$ on a submanifold of the cotangent space $T^*\mathbb{R}^d$ for which the restriction of the symplectic form to its tangent space is of constant rank. ***To cite this article: C. Fermanian Kammerer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abridged English version

In recent works, two-scale Wigner measures have proved their usefulness in different contexts: (e.g. [12] ou [2–5]). Our aim here is to generalize the approach performed for involutive and for symplectic submanifolds (in [4] and [2,3] respectively) to more general ones.

Adresse e-mail : Clotilde.Fermanian@math.u-cergy.fr (C. Fermanian Kammerer).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.01.002

Wigner measures. Let us recall that for studying oscillations at the scale $\frac{1}{h}$ of a bounded family (ψ^h) in $L^2(\mathbb{R}^d)$, one can use semi-classical pseudo-differential test operator $\mathrm{op}_h(a)$ which is the operator of symbol $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, the kernel of which is $k(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\frac{x+y}{2}, h\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}$. Then, a Wigner measure (also called semi-classical measure) of (ψ^h) is a positive Radon measure μ on $T^*\mathbb{R}^d$, which reads $\mu \in \mathcal{M}^+(T^*\mathbb{R}^d)$ such that there exists h_k, $h_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\forall a \in \mathcal{C}_0^\infty\big(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\big), \quad \big(\mathrm{op}_{h_k}(a)\psi^{h_k} \mid \psi^{h_k}\big) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int a(x,\xi)\,\mathrm{d}\mu.$$

These measures first appear in [9,6,7,11]. The name of Wigner measures refers to the Wigner transform of (ψ^h) of which μ is a limit point in $\mathcal{D}'$ (cf. [8]).

Concentration on a submanifold of $T^*\mathbb{R}^d$. We consider a codimension l submanifold L of the cotangent space $T^*\mathbb{R}^d$ such that the restriction of the symplectic form $\sigma = \mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x$ to TL is of constant rank. By the Theorem 21.2.4 of Hörmander [10] there exists local coordinates $(x,\xi) = (x', x'', x'''; \xi', \xi'', \xi''')$ on $T^*\mathbb{R}^d$ and $k \in \mathbb{N}$ such that

$$L = \{x' = 0, x'' = \xi'' = 0\} \quad \text{with } x' \in \mathbb{R}^k,\ x'',\ \xi'' \in \mathbb{R}^p \text{ and } 2p + k = l.$$

We study the concentration of (ψ^h) on L at the scale $\varepsilon(h)$, $\varepsilon(h) \gg h$ by use of the two-scaled operators

$$\mathrm{op}_h^{(2)}(a) = \mathrm{op}_h\left(a\left(x, \xi, \frac{(x', x'', \xi'')}{\varepsilon(h)}\right)\right),$$

where the symbols a belong to the class $\mathcal{A}_l$ of functions such that:
$a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d \times \mathbb{R}_\theta^l)$, there exist a compact $K \subset \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d$ such that for all $\theta \in \mathbb{R}^l$, $a(\cdot,\cdot,\theta) \in \mathcal{C}_0^\infty(K)$ and a function homogeneous of degree 0 *in θ such that $a(x,\xi,R\theta) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} a_\infty(x,\xi,\theta)$ in $\mathcal{C}^\infty$.*

For $\sqrt{h} \lesssim \varepsilon(h)$, the use of the scaling operator $T : f \mapsto (\sqrt{h})^{d/2} f(\sqrt{h}\cdot)$ and of the Calderon–Vaillancourt theorem applied to $T\,\mathrm{op}_h^{(2)}(a)T^*$ give the boundedness of $\mathrm{op}_h^{(2)}(a)$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Two-scale Wigner measures. We associate with L its tangent bundle TL and its normal bundle $N(L) = T(T^*\mathbb{R}^d)/TL$. Quotienting the fibres of $N(L)$ by the action of $\mathbb{R}^{*+}$ through dilations, we get the normal bundle in sphere $S(L)$. We set $V(L) = TL \cap (TL)^\perp$ and $X(L) = TL^\perp/V(L)$.

Consider now a trace-class operator A on $L^2(\mathbb{R}^p)$ with kernel k_A. Its Weyl symbol m_A is a function on $\mathbb{R}^{2p}$ such that $A = m_A^w(z, D_z)$ (m_A is the Wigner transform of k_A).

Let $\Sigma(\mathbb{R}^{2p})$ be the vector space consisting on functions which are Weyl symbols of trace class operators on $L^2(\mathbb{R}^p)$. One can define the bundle $\Sigma(X(L))$ of which the fibre above $\rho \in L$ is $\Sigma(X(L)_{|\rho})$. Indeed, if κ is a canonical transform of $T^*\mathbb{R}^d$, κ induces a linear change of coordinates on $T(T^*\mathbb{R}^d)_{|\rho}$ and thus on $X(L)_{|\rho}$. The Fourier integral operator associated with this linear transform is the conjugation by a unitary operator which preserves the trace class.

We denote by $\mathcal{M}(V(L), \Sigma(X(L)))$ the set of measures on $V(L)$ valued on $\Sigma(X(L))$:
if $m \in \mathcal{M}(V(L), \Sigma(X(L)))$, $\mathcal{V}$ is an open set where $L = \{x' = 0,\ x'' = \xi'' = 0\}$ and $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{V})$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^k)$,

$$\langle a\phi, m\rangle = \int a(0,0,x'''; \xi', 0, \xi''')\phi(y)\, m(\mathrm{d}x''', \mathrm{d}\xi', \mathrm{d}\xi''', \mathrm{d}y, z, \zeta)$$

is the Wigner symbol of a trace class operator on $L^2(\mathbb{R}^p)$. Moreover, if for $a\phi \geqslant 0$, $\langle a\phi, m\rangle(z, D_z)$ is a positive self-adjoint operator, one says that m is positive, which reads $m \in \mathcal{M}^+(V(L), \Sigma(X(L)))$.

Theorem 0.1. 1st case: $\varepsilon(h) \sim \sqrt{h}$. *There exist h_k, $h_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\nu \in \mathcal{M}^+(S(L))$ and $m \in \mathcal{M}^+(V(L), \Sigma(X(L)))$ such that for any open set $\mathcal{V}$ where $L = \{x' = 0, x'' = \xi'' = 0\}$ and for all $a \in \mathcal{A}_l$ supported in $\mathcal{V}$,*

$$\big(\mathrm{op}_{h_k}^{(2)}(a)\psi^{h_k}\mid\psi^{h_k}\big)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{L^c}a_\infty\bigg(x,\xi,\frac{(x',x'',\xi'')}{|(x',x'',\xi'')|}\bigg)\,\mathrm{d}\mu+\int_{S(L)}a_\infty(x,\xi,\omega)\,\mathrm{d}\nu+\mathrm{Tr}\bigg(\int_{V(L)}a^w(x,\xi,y,z,D_z)\,\mathrm{d}m^w(z,D_z)\bigg).$$

2nd case: $\varepsilon(h)\gg\sqrt{h}$. *There exist* h_k, $h_k\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$, $\nu\in\mathcal{M}^+(S(L))$ *and* $m\in\mathcal{M}^+(N(L))$ *such that for any open set* $\mathcal{V}$ *where* $L=\{x'=0,\ x''=\xi''=0\}$ *and for all* $a\in\mathcal{A}_l$ *supported in* $\mathcal{V}$,

$$\big(\mathrm{op}_{h_k}^{(2)}(a)\psi^{h_k}\mid\psi^{h_k}\big)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{L^c}a_\infty\bigg(x,\xi,\frac{(x',x'',\xi'')}{|(x',x'',\xi'')|}\bigg)\,\mathrm{d}\mu+\int_{S(L)}a_\infty(x,\xi,\omega)\,\mathrm{d}\nu+\int_{N(L)}a(x,\xi,\theta)\,\mathrm{d}m.$$

In both cases, μ *is a Wigner measure of* (ψ^h).

We give below a sketch of the proof and we discuss properties of these measures.

1. Introduction

Dans des travaux récents, les mesures de Wigner à deux échelles ont prouvé leur utilité dans différents contextes : équation de Schrödinger avec interface [12] et étude des croisements de valeurs propres [2–5]. Etant donnée une suite uniformément bornée de L^2 oscillant à l'échelle $1/h$, ces mesures caractérisent dans un espace des phases 2-microlocal, sa concentration à une échelle $\varepsilon(h)$, $h\lesssim\varepsilon(h)$, sur une sous-variété de l'espace des phases. Le cas des sous-variétés involutives et symplectiques est traité dans [12,4] et [2,3] respectivement : nous étudions ici comment cette approche se généralise à d'autres sous-variétés.

2. Mesures de Wigner

Lorsque (ψ^h) est une famille uniformément bornée de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on étudie ses oscillations à l'échelle $\frac{1}{h}$ en testant (ψ^h) contre des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques $\mathrm{op}_h(a)$ dont le noyau $k(x,y)$ dépend de leur symbole $a\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ suivant $k(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d}a(\frac{x+y}{2},h\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^d}$. Une mesure de Wigner μ (ou mesure semi-classique) de (ψ^h) est alors une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ – on notera $\mu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ – pour laquelle il existe une suite h_k, $h_k\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$, telle que

$$\forall a\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d),\quad\big(\mathrm{op}_{h_k}(a)\psi^{h_k}\mid\psi^{h_k}\big)\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\int a(x,\xi)\,\mathrm{d}\mu.$$

Ces mesures ont été d'abord introduites dans [9,6,7] et [11]. Le nom de mesures de Wigner fait référence à la transformée de Wigner de (ψ^h) dont μ est une valeur d'adhérence (cf. [8]).

L'espace cotangent à $\mathbb{R}^d$, $T^*\mathbb{R}^d$, muni de la 2-forme $\sigma=\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}x$ est un espace symplectique. Le théorème d'Egorov implique l'invariance de la mesure μ par les transformations canoniques, c'est-à-dire par les changements de variables préservant la forme symplectique. La mesure μ est donc une mesure sur $T^*\mathbb{R}^d$ et décrit dans cet espace les obstructions à la convergence forte de (ψ^h).

3. Concentration sur une sous-variété de l'espace cotangent

Soit (ψ^h) une famille dont la mesure semi-classique charge une sous-variété L de codimension l de $T^*\mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $TL\cap(TL)^\perp$ est une sous-variété de dimension k, i.e.

$$\forall\rho\in L,\quad\dim\big(TL_{|\rho}\cap(TL)^\perp_{|\rho}\big)=k.$$

La restriction de la forme symplectique σ à TL est alors de rang constant $2d-(l+k)$. Les exemples classiques sont les sous-variétés symplectiques ($k=0$), involutives ($k=l=\operatorname{codim} L$) et isotropes ($k=2d-l=\dim L$). Pour une telle sous-variété, le Théorème 21.2.4 de Hörmander [10] assure l'existence d'un système de coordonnées locales $(x,\xi)=(x',x'',x''',\xi',\xi'',\xi''')$ sur $T^*\mathbb{R}^d$ telles que

$$L=\{x'=0, x''=\xi''=0\} \quad \text{avec } x'\in\mathbb{R}^k,\ x'',\xi''\in\mathbb{R}^p \text{ et } 2p+k=l.$$

Pour étudier la concentration de (ψ^h) sur L à l'échelle $\varepsilon(h)$, $\varepsilon(h)\gg h$, on fait un zoom à l'échelle $\varepsilon(h)$ près de L en utilisant la famille d'opérateurs tests à deux échelles

$$\mathrm{op}_h^{(2)}(a)=\mathrm{op}_h\left(a\left(x,\xi,\frac{(x',x'',\xi'')}{\varepsilon(h)}\right)\right),$$

où le symbole a appartient à la classe $\mathcal{A}_l$ des symboles tels que :

$a\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_\xi\times\mathbb{R}^l_\theta)$, il existe un compact $K\subset\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_\xi$ tel que pour tout $\theta\in\mathbb{R}^l$, $a(\cdot,\cdot,\theta)\in\mathcal{C}_0^\infty(K)$ et une fonction homogène de degré 0 *en θ telle que $a(x,\xi,R\theta)\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}a_\infty(x,\xi,\theta)$ dans $\mathcal{C}^\infty$.*

L'utilisation de l'opérateur de changement d'échelle $T: f\mapsto(\sqrt{h})^{d/2}f(\sqrt{h}\cdot)$ et le théorème de Calderon–Vaillancourt appliqué à l'opérateur $T\,\mathrm{op}_h^{(2)}(a)T^*$ donnent le caractère borné sur L^2 de $\mathrm{op}_h^{(2)}(a)$ pourvu que $\sqrt{h}\lesssim\varepsilon(h)$ ou bien que L soit involutive et $h\lesssim\varepsilon(h)$. Nous nous intéressons au cas $\sqrt{h}\lesssim\varepsilon(h)$, le cas des autres échelles pour des involutives étant traité dans [1] et [4].

4. Mesures semi-classiques à deux échelles

On associe à L son fibré tangent TL et son fibré normal $N(L)=T(T^*\mathbb{R}^d)/TL$ dont la fibre au-dessus d'un point $\rho\in L$ est donnée par $N(L)_{|\rho}=T(T^*\mathbb{R}^d)_{|\rho}/TL_{|\rho}$. En quotientant cette fibre par l'action de $\mathbb{R}^{*+}$ par les homothéties, on obtient la fibre $S(L)_{|\rho}=\mathbb{R}^{*+}\backslash T(T^*\mathbb{R}^d)_{|\rho}/TL_{|\rho}$ du fibré normal en sphère $S(L)$. Enfin, on pose $V(L)=TL\cap(TL)^\perp$ et $X(L)=TL^\perp/V(L)$. Remarquons que si L est involutive, $V(L)=TL^\perp$ et $X(L)=\{0\}$ et que si L est symplectique, $V(L)=\{0\}$ et $X(L)=TL^\perp$.

Considérons maintenant un opérateur à trace A sur $L^2(\mathbb{R}^p)$ de noyau k_A. Son symbole de Weyl est une fonction m_A de $\mathbb{R}^{2p}$ telle que $A=m_A^w(z,D_z)$ (on choisit là aussi la quantification de Weyl) et tendant vers 0 à l'infini. Cette fonction m_A est la transformée de Wigner du noyau k_A.

Soit $\Sigma(\mathbb{R}^{2p})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2p})$ des fonctions qui sont des symboles de Weyl d'opérateurs à trace de $L^2(\mathbb{R}^p)$. On peut alors définir le fibré $\Sigma(X(L))$ dont la fibre au-dessus d'un point $\rho\in L$ est l'espace vectoriel $\Sigma(X(L)_{|\rho})$. En effet, si κ est une transformation canonique de $T^*\mathbb{R}^d$, κ induit un changement linéaire de coordonnées sur $T(T^*\mathbb{R}^d)_{|\rho}$ et donc sur $X(L)_{|\rho}$. L'opérateur intégral de Fourier associé à cette transformation canonique linéaire est alors la conjugaison par un opérateur unitaire, ce qui préserve le caractère *à trace* d'un opérateur.

Nous allons utiliser des mesures sur $V(L)$ à valeurs dans $\Sigma(X(L))$; nous noterons $\mathcal{M}(V(L),\Sigma(X(L)))$ l'espace de tels objets : si $m\in\mathcal{M}(V(L),\Sigma(X(L)))$, $\mathcal{V}$ est un ouvert où $L=\{x'=0,\ x''=\xi''=0\}$ et $a\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{V})$, $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^k)$,

$$\langle a\phi,m\rangle=\int a(0,0,x''';\xi',0,\xi''')\phi(y)\,m(\mathrm{d}x''',\mathrm{d}\xi',\mathrm{d}\xi''',\mathrm{d}y,z,\zeta)$$

est le symbole de Wigner d'un opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R}^p_z)$. De plus, si $<a\phi,m>(z,D_z)$ est un opérateur auto-adjoint positif pour $a\phi\geqslant 0$, on dira que m est positive, ce que l'on notera $m\in\mathcal{M}^+(V(L),\Sigma(X(L)))$. Par ailleurs, il faut noter que dans le cas où L est involutive, la structure opératorielle de ces objets disparaît et on se retrouve avec des mesures de Radon usuelles.

Théorème 4.1. 1$^{\text{er}}$ cas : $\varepsilon(h) \sim \sqrt{h}$. *Il existe une suite* h_k, $h_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *deux mesures* $\nu \in \mathcal{M}^+(S(L))$ *et* $m \in \mathcal{M}^+(V(L), \Sigma(X(L)))$ *telles pour tout ouvert* $\mathcal{V}$ *où* $L = \{x' = 0, x'' = \xi'' = 0\}$ *et pour tout* $a \in \mathcal{A}_l$ *à support dans* $\mathcal{V}$,

$$\left(\mathrm{op}_{h_k}^{(2)}(a)\psi^{h_k} \mid \psi^{h_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{L^c} a_\infty\left(x, \xi, \frac{(x', x'', \xi'')}{|(x', x'', \xi'')|}\right) \mathrm{d}\mu + \int_{S(L)} a_\infty(x, \xi, \omega)\, \mathrm{d}\nu + \mathrm{Tr}\left(\int_{V(L)} a^w(x, \xi, y, z, D_z)\, \mathrm{d}m^w(z, D_z)\right).$$

2$^{\text{ième}}$ cas : $\varepsilon(h) \gg \sqrt{h}$. *Il existe une suite* h_k, $h_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\nu \in \mathcal{M}^+(S(L))$ *et* $m \in \mathcal{M}^+(N(L))$ *telles que pour tout ouvert* $\mathcal{V}$ *où* $L = \{x' = 0,\ x'' = \xi'' = 0\}$ *et pour tout* $a \in \mathcal{A}_l$ *à support dans* $\mathcal{V}$,

$$\left(\mathrm{op}_{h_k}^{(2)}(a)\psi^{h_k} \mid \psi^{h_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{L^c} a_\infty\left(x, \xi, \frac{(x', x'', \xi'')}{|(x', x'', \xi'')|}\right) \mathrm{d}\mu + \int_{S(L)} a_\infty(x, \xi, \omega)\, \mathrm{d}\nu + \int_{N(L)} a(x, \xi, \theta)\, \mathrm{d}m.$$

Dans les deux cas, μ *est une mesure semi-classique de* (ψ^h).

Il est possible de traiter des familles à valeurs vectorielles : on obtient des mesures matricielles en utilisant des symboles matriciels dont les coefficients sont des fonctions de $\mathcal{A}_l$.

Une autre approche consiste à utiliser directement un système d'équations de L, $g = (g_1, \ldots, g_l) = 0$ satisfaisant des conditions de crochet $\{g_{k+p+i}, g_{k+i}\} = 1$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $\{g_j, g_q\} = 0$ sinon, et de quantifier les opérateurs à deux échelles en $\mathrm{op}_h^{(g)}(a) = \mathrm{op}_h(a(x, \xi, \frac{g}{\varepsilon(h)}))$. La condition $\varepsilon(h) \lesssim \sqrt{h}$ est alors nécessaire pour que cette quantification définisse des opérateurs bornés et on doit travailler sous cette hypothèse, même si L est involutive. On obtient alors le même genre de résultats que dans [4] et [2,3].

5. Localisation et propagation

Enfin, si (ψ^h) est solution microlocalement d'un système d'e.d.p. $\mathrm{op}_h(q)\psi^h = o(h)$, les mesures ν et m (comme la mesure μ) sont localisées au-dessus de $\Sigma = \{q = 0\}$ et donc de $J = L \cap \Sigma$. Supposons que cette intersection est transverse et que le champ hamiltonien H_q associé à q vérifie $H_q \in TL$; alors $H_q \notin TL^\perp$ et la fibre de $TJ \cap TJ^\perp$ au-dessus de J est de dimension $k + 1$. On peut donc considérer les mesures ν_J et m_J associées à la concentration de (ψ^h) sur J à l'échelle $\varepsilon(h)$. Compte tenu de l'identification $T(T^*\mathbb{R}^d)_{|J}/TI_{|J} \simeq T\Sigma/TJ$, ν apparaît comme une mesure sur $S_\Sigma(J) = \mathbb{R}^{*+}\backslash T\Sigma/TJ$ identifiable à ν_J. De même, dans le cas $\varepsilon(h) \gg \sqrt{h}$, on identifie m à une mesure sur $N_\Sigma(J) = T\Sigma/TJ$ identifiable à m_J. Lorsque $\varepsilon(h) \sim \sqrt{h}$, l'égalité $V(J) = V(L) + \mathbb{R} H_q$ permet l'identification $X(J) \simeq X(L)$ et de lier ainsi m à m_J. De ce fait, si l'on change L en L' en conservant $\Sigma \cap L' = J$ avec une intersection transverse, on ne modifie pas les mesures à deux échelles. Enfin, on peut obtenir pour les mesures (ν, m) des équations de transport le long des trajectoires hamiltoniennes de q.

6. Preuve du résultat

La preuve se fait en deux étapes. On démontre l'existence de ces mesures dans un système de coordonnées locales puis on étudie leur invariance géométrique sous l'action de transformations canoniques.

Première étape : On remarque tout d'abord que si T_ε est l'opérateur de changement d'échelle défini par

$$T_\varepsilon f(x', x'', x''') = \varepsilon(h)^{(k+p)/2} f\left(\varepsilon(h)x', \varepsilon(h)x'', x'''\right),$$

alors on a

$$T_\varepsilon \operatorname{op}_h^{(2)}(a) T_\varepsilon^* = \operatorname{op}_1\left(a\left(\varepsilon x', \varepsilon x'', x'''; \frac{h}{\varepsilon}\xi', \frac{h}{\varepsilon}\xi'', h\xi'''; x', x'', \frac{h}{\varepsilon^2}\xi''\right)\right).$$

Soit $\chi_R(\theta) = \chi(\frac{\theta}{R})$ une fonction de troncature, avec $\chi \geqslant 0$, $\chi(0) = 1$, $\chi(\theta) = 0$ pour $|\theta| > 1$. Pour $R > 0$

$$\big(\operatorname{op}_h^{(2)}(a)\psi^h \mid \psi^h\big) = \big(\operatorname{op}_h^{(2)}\big(a\chi_R(\theta)\big)\psi^h \mid \psi^h\big) + \big(\operatorname{op}_h^{(2)}\big(a\big(1-\chi_R(\theta)\big)\big)\psi^h \mid \psi^h\big) = (1) + (2).$$

Si $\varepsilon(h) \gg \sqrt{h}$, cet opérateur est un opérateur pseudodifférentiel semi-classique avec trois petits paramètres : h, h/ε et h/ε^2. De plus, $(a\chi_R)$ étant à support compact

$$T_\varepsilon \operatorname{op}_h^{(2)}(a\chi_R) T_\varepsilon^* \underset{h\to 0}{\sim} \operatorname{op}_1\left((a\chi_R)\left(0, 0, x'''; \frac{h}{\varepsilon}\xi', 0, \frac{h}{\varepsilon}\xi'''; x', x'', \frac{h}{\varepsilon^2}\xi''\right)\right) \quad \text{dans } \mathcal{L}\big(L^2(\mathbb{R}^d)\big).$$

Le calcul symbolique a comme gain h/ε^2 et la limite de (1) est décrite par une mesure semi-classique m sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Si $\varepsilon(h) \sim \sqrt{h}$: on a alors affaire à des opérateurs pseudodifférentiels semi-classiques avec deux petits paramètres (h et $\sqrt{h}$) à valeurs opérateur pseudo-différentiel sur $L^2(\mathbb{R}^p)$. On remarque alors que la famille $(T_\varepsilon\psi^h)$ est une famille uniformément bornée de $L^2(\mathbb{R}^{2d-p}_{x',x'''}, L^2(\mathbb{R}^p_{x''}))$ et la mesure de Wigner M de cette famille permet de décrire la limite de (1). Cette mesure sur $\mathbb{R}^{2d-p} \times \mathbb{R}^{2d-p}$ est à valeurs opérateur à trace sur $L^2(\mathbb{R}^p)$. Notre mesure m est son symbole de Wigner.

On montre ensuite que $\limsup_{R\to\infty} \limsup_{h\to 0}(2)$ ne dépend que de a_∞ et est positive, ce qui permet de définir la mesure ν, vu que pour a supporté en dehors de L, le résultat du Théorème 4.1 est évident.

Deuxième étape : On considère une transformation canonique κ conservant les équations de L. On associe à κ un opérateur intégral de Fourier tel que pour tout $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, $K \operatorname{op}_h(a\circ\kappa)K^* = \operatorname{op}_h(a) + \mathrm{O}(h^2)$. Soit $N(\kappa)$ la transformation induite par κ sur $N(L)$, l'invariance géométrique de nos objets vient de l'égalité

$$\forall a \in \mathcal{A}_l, \quad \big(\operatorname{op}_h^{(2)}\big(a\circ N(\kappa)\big)\psi^h \mid \psi^h\big) = \big(\operatorname{op}_h^{(2)}(a)K\psi^h \mid K\psi^h\big) + \mathrm{o}(1).$$

A cet effet, on utilise un argument d'équations d'évolution comme dans [4]. Le cas d'une transformation canonique linéaire étant évident, on relie κ à une transformation linéaire par une famille régulière de transformations canoniques κ_s et on déforme l'opérateur K en K_s, chacun des opérateurs K_s étant associé à κ_s. On pose alors $v_h(s) = K_s\psi^h$ et on montre que si a_s vérifie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(a_s \circ N(\kappa_s)) = 0$, alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\operatorname{op}_h^{(2)}(a_s)v^h(s) \mid v^h(s))$ tend vers 0 uniformément pour $h \in]0, h_0[$ et $s \in [0, 1]$.

Références

[1] C. Fermanian Kammerer, Mesures semi-classiques 2-microlocales, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 331 (2000) 515–518.
[2] C. Fermanian Kammerer, A non commutative Landau–Zener formula, Math. Nach. 271 (2004) 22–50.
[3] C. Fermanian Kammerer, Semi-classical analysis of generic codimension 3 crossings, Int. Math. Res. Not. 45 (2004) 2391–2435.
[4] C. Fermanian Kammerer, P. Gérard, Mesures semi-classiques et croisements de modes, Bull. Soc. Math. France 130 (1) (2002) 145–190.
[5] C. Fermanian Kammerer, P. Gérard, A Landau–Zener formula for non-degenerated involutive codimension 3 crossings, Ann. Inst. H. Poincaré 4 (2003) 513–552.
[6] P. Gérard, Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, Exposé de l'Ecole Polytechnique, E.D.P., Exposé N XVI, 1991.
[7] P. Gérard, E. Leichtnam, Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem, Duke Math. J. 71 (1993) 559–607.
[8] P. Gérard, P.A. Markowich, N.J. Mauser, F. Poupaud, Homogenization limits and Wigner transforms, Comm. Pure Appl. Math. 50 (4) (1997) 323–379.
[9] B. Helffer, A. Martinez, D. Robert, Ergodicité et limite semi-classique, Comm. Math. Phys. 109 (1987) 313–326.
[10] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Springer-Verlag, 1985.
[11] P.-L. Lions, T. Paul, Sur les mesures de Wigner, Rev. Mat. Iberoamericana 9 (1993) 553–618.
[12] L. Miller, Propagation d'onde semi-classiques à travers une interface et mesures 2-microlocales, Thèse de l'Ecole Polytechnique, 1996.