Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 295–300

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Systèmes dynamiques

Temps d'instabilité pour les perturbations de systèmes intégrables analytiques

Jean-Pierre Marco

Institut de mathématiques de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 28 septembre 2004 ; accepté le 12 décembre 2004

Disponible sur Internet le 22 janvier 2005

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R > 0$ on pose $B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < R\}$. Soient $n \geqslant 4$ et $R > 1$. On construit une suite $(H_j)_{j \geqslant 0}$ de Hamiltoniens analytiques sur un voisinage complexe V de $\mathbb{T}^n \times B_R$, perturbations du Hamiltonien $\hbar(r) = \frac{1}{2}(r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2) + r_n$, qui possèdent des points pour lesquels le temps de dérive suivant les variables d'action est majoré par $\exp c(1/\varepsilon_j)^{1/2(n-3)}$, où $c > 0$ est une constante et $\varepsilon_j = \|H_j - \hbar\|_{C^0(V)}$. Les orbites considérées passent près de résonances doubles, le résultat est donc presque optimal puisque l'exposant de stabilité pour de telles orbites est $1/2(n-2)$. ***Pour citer cet article : J.-P. Marco, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Instability times for perturbations of integrable analytic systems. For a positive integer n and $R > 0$, we set $B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < R\}$. Given $n \geqslant 4$ and $R > 1$ we construct a sequence of analytic perturbations (H_j) of the completely integrable Hamiltonian $\hbar(r) = \frac{1}{2}(r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2) + r_n$ on $\mathbb{T}^n \times B_R^n$, with unstable orbits for which we can estimate the time of drift in the action space. These functions H_j are analytic on a fixed complex neighborhood V of $\mathbb{T}^n \times B_R^n$, and if $\varepsilon_j := \|H_j - \hbar\|_{C^0(V)}$ the time of drift of these orbits is smaller than $\exp(c(1/\varepsilon_j)^{1/2(n-3)})$ for a fixed constant $c > 0$. Our unstable orbits pass close to a doubly resonant surface, so the result is almost optimal since the stability exponent for such orbits is $1/2(n-2)$. ***To cite this article: J.-P. Marco, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Adresse e-mail : marco@math.jussieu.fr (J.-P. Marco).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.12.019

Abridged English version

We denote by $\mathbb{N}^*$ the set of positive integers. Given $n \in \mathbb{N}^*$, we set $B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < R\}$ (where $\|\ \|_\infty$ stands for the Sup norm), $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{A}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. We endow $\mathbb{A}^n$ with the angle-action coordinates $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ in $\mathbb{T}^n$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ in $\mathbb{R}^n$, and the usual symplectic form. We set $h_{[n]}(r) = \frac{1}{2}(r_1^2 + \dots + r_n^2)$ and $\hbar_{[n]}(r) = (r_1^2 + \dots + r_{n-1}^2) + r_n$. We denote by $r(x)$ the action coordinate of a point $x \in \mathbb{A}^n$. If H is a Hamiltonian function on an open set of $\mathbb{A}^n$, we denote by Φ^{tH} its (local) time t flow. Consider an integer $n \geqslant 4$ and $R \in]1, +\infty[$. The purpose of this Note is to sketch the construction of a sequence $(H_j)_{j \geqslant 0}$ of analytic functions on a complex neighborhood V of $\mathbb{T}^n \times B_R^n$, such that $\varepsilon_j := \|H_j - \hbar\|_{C^0(V)} \to 0$ when $j \to \infty$, for which there exists for each j a point $z^{(j)} \in \mathbb{A}^n$ and a time τ_j satisfying $\tau_j \leqslant \exp c(\frac{1}{\varepsilon_j})^{1/(2(n-3))}$ and $\|r(\Phi^{\tau_j H_j}(z^{(j)})) - r(z^{(j)})\|_\infty = 1$, where c is a positive constant. As the orbit of $z^{(j)}$ passes close to double resonances, the usual estimates for the stability times yield lower bounds for the instability times of the form $\tau_j \geqslant \exp c(1/\varepsilon_j)^{1/2(n-2)}$, therefore our result is nearly optimal.

Our construction is an evolution of the approach we developed in [6] for Gevrey Hamiltonian functions, the main new difficulty is that we can no longer make use of compact supported functions. Our systems here are very close to those introduced in [5] in order to exhibit examples of hyperbolic tori with nearly optimal splitting.

We need three different steps in order to obtain the functions H_j. The first and main one is the construction of a sequence of analytic diffeomorphisms $(\mathcal{F}_q)_{q \in \mathbb{N}}$ on $\mathbb{A}^2$, perturbations of the product map $\mathcal{F}_* = \Phi^{\frac{1}{2}r_1^2 + \cos 2\pi\theta_1} \times \Phi^{\frac{1}{2}r_2^2}$, for which we can prove the existence of wandering points and estimate their speed of drift. To this end the key idea is to use a shadowing lemma of Easton (see [1]). We already proved in [5] the existence of a transition chain for $\mathcal{F}_q$, formed by heteroclinically connected invariant circles $(\mathcal{C}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, defined by $\mathcal{C}_k = \{(\theta_1, r_1) = (0, 0), r_2 = k/q\} \subset \mathbb{A}^2$, for which the heteroclinic point $\omega^{(q,k)} \in W^-(\mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{F}_q) \cap W^+(\mathcal{C}_k, \mathcal{F}_q)$ is extremely close to $(\theta_1 = \frac{1}{2}, r_1 = 2, \theta_2 = 0, r_2 = k/q)$.

Here we construct a sequence of boxes $(\widetilde{\mathcal{D}}^{(q,k)})_{k \in \mathbb{Z}}$ (images of windows), with $\widetilde{\mathcal{D}}^{(q,k)}$ very near $\omega^{(q,k)}$, such that $(\mathcal{F}_q)^q(\widetilde{\mathcal{D}}^{(q,k)})$ intersects $\widetilde{\mathcal{D}}^{(q,k+1)}$ in a convenient way. Easton's lemma yields the existence of a point $\zeta^{(q)}$ such that $(\mathcal{F}_q)^{kq}(\zeta^{(q)})$ belongs to the box $\widetilde{\mathcal{D}}^{(q,k)}$ for each $k \in \mathbb{Z}$. So q^2 iterations of $\mathcal{F}_q$ make the r_2-coordinate of the point $\zeta^{(q)}$ drift over an interval of length 1.

The next step is to use a coupling device, due to Herman, introduced in [6]. This enables us to construct a sequence of maps Ψ_j defined on the annulus $\mathbb{A}^n$, $n \geqslant 3$, into which the previous dynamics may be embedded in a convenient way: the wandering points $\zeta^{(q)}$ of $\mathcal{F}_q$ give rise to wandering points $z^{(j)}$ for Ψ_j, for which q_j^2 iterations of Ψ_j produce a drift of length 1. The crucial remark is that these maps Ψ_j are now perturbations of the diffeomorphism $\Phi^{h_{[n]}}$, which is in action-angle form. The coupling technique is therefore used here as a key tool for passing from a priori unstable systems (that is with order one hyperbolicity) like $\mathcal{F}_q$ to the a priori stable case, which is notoriously much more difficult. To be more precise, there exist a fixed complex neighborhood U of $\mathbb{A}^n$ and a sequence N_j of integers tending to ∞ such that $\|\Psi_j - \Phi^h\|_{C^0(U)} \leqslant 1/N_j^2$, and which satisfy the relation $q_j^2 \leqslant \exp cN_j^{1/(n-2)}$.

The final step is to go back to the Hamiltonian formalism. Thanks to the previous estimate on $\Psi_j - \Phi^h$ one can use the analytic suspension theorem of Kuksin and Pöschel ([2]). This easily yields a sequence of analytic Hamiltonian functions (H_j), defined on a fixed complex strip and perturbations of size $1/N_j^2$ of $\hbar_{[n+1]}$, such that the system generated by H_j possesses the previous diffeomorphism Ψ_j as a Poincaré return map for a suitable section, and the result follows (note the shift of one unit in the exponent).

1. Le résultat principal

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, et pour $R > 0$ on pose $B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < R\}$ (où $\|\ \|_\infty$ désigne la norme Sup). Si $\rho > 0$, on note $V_\rho(\mathbb{T}^n \times B_R^n)$ le voisinage d'épaisseur ρ de $\mathbb{T}^n \times B_R^n$ dans $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^n \times \mathbb{C}^n$, pour la distance produit. Sur l'anneau $\mathbb{A}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, muni des coordonnées angles-actions $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n$, $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, et de sa structure symplectique canonique, on introduit les Hamiltoniens $h_{[n]}(r) = \frac{1}{2}(r_1^2 + \cdots + r_n^2)$ et $\hbar_{[n]}(r) = (r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2) + r_n$. Si H est un Hamiltonien sur un ouvert de $\mathbb{A}^n$, on note Φ^{tH} son flot (local) au temps $t \in \mathbb{R}$; si $x \in \mathbb{A}^n$, on note $r(x)$ sa coordonnée d'action. Cette note présente l'essentiel de la preuve du théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soient n un entier $\geqslant 4$ et $R \in]1, +\infty[$. Il existe $\rho > 0$ et une suite $(H_j)_{j\geqslant 0}$ de fonctions analytiques sur $V = V_\rho(\mathbb{T}^n \times B_R)$, vérifiant $\varepsilon_j := \|H_j - \hbar_{[n]}\|_{C^0(V)} \to 0$ si $j \to \infty$, telle que pour tout $j \geqslant 1$ il existe un point $z^{(j)} \in \mathbb{A}^n$ et un instant τ_j qui vérifient*

$$\tau_j \leqslant \exp c\left(\frac{1}{\varepsilon_j}\right)^{1/(2(n-3))}, \qquad \left\| r\left(\Phi^{\tau_j H_j}(z^{(j)})\right) - r(z^{(j)}) \right\|_\infty = 1,$$

où c est une constante positive.

Comme l'orbite du point $z^{(j)}$ passe près de résonances doubles, les estimations classiques des temps de stabilité [4,7,6] donnent pour τ_j une borne inférieure de la forme $\tau_j \geqslant \exp c(1/\varepsilon_j)^{1/2(n-2)}$, le théorème précédent est donc presque optimal.

On construira d'abord une famille de difféomorphismes de $\mathbb{A}^n$, perturbations de l'application intégrable $\Phi^{h_{[n]}}$, avec des points errants et des estimations de leur temps de dérive. On en déduira facilement le théorème par un procédé de suspension analytique. On trouvera dans [3] les preuves détaillées des résultats annoncés dans cette Note.

2. Une suite de difféomorphismes sur $\mathbb{A}^2$ avec des points errants

2.1. On introduit dans ce paragraphe une suite de difféomorphismes $(\mathcal{F}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{A}^2$, pour lesquels on montrera l'existence de points errants par une méthode de fenêtres due à Easton, qui permettra de plus d'estimer leur vitesse. Ces difféomorphismes sont des perturbations de l'application

$$\mathcal{F}_* = \Phi^{\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)+\cos 2\pi\theta_1} = \Phi^{\frac{1}{2}r_1^2+\cos 2\pi\theta_1} \times \Phi^{\frac{1}{2}r_2^2},$$

obtenues en composant $\mathcal{F}_*$ par le temps 1 d'un Hamiltonien de petite norme analytique. On se donne une largeur d'analyticité $\sigma > 0$. Pour tout entier q on pose $\mathcal{F}_q = \Phi^{\frac{1}{q}f^{(q)}} \circ \mathcal{F}_*$, où $f^{(q)}(\theta_1, \theta_2) = f_1^{(q)}(\theta_1) f_2(\theta_2)$, avec

$$f_1^{(q)}(\theta_1) = (\sin \pi\theta_1)^{\nu_q}, \quad \nu_q = 2\left[\frac{|\operatorname{Ln} q|}{4\pi\sigma}\right], \qquad f_2(\theta_2) = -\frac{1}{\pi}\left(2 + \sin 2\pi\left(\theta_2 + \frac{1}{6}\right)\right)$$

où [ ] désigne la partie entière. Comme ν_q est pair la fonction $f^{(q)}$ est bien définie sur $\mathbb{T}$, et on vérifie l'inégalité $\|\frac{1}{q} f^{(q)}\|_{C^0(V_\sigma(\mathbb{A}^n))} \leqslant \frac{1}{\sqrt{q}} \|f_2\|_{C^0(V_\sigma(\mathbb{A}^n))}$. Il en résulte en particulier que $\mathcal{F}_q$ est bien une perturbation de $\mathcal{F}_*$ en topologie analytique. Notons que $f_1^{(q)}$, et donc aussi $f^{(q)}$, ont un contact d'ordre ν_q avec la fonction nulle sur la surface $\{\theta_1 = 0\}$, alors que $f_1^{(q)}(\frac{1}{2}) = 1$ pour tout q. On renvoie à [5] pour une discussion sur le rôle de $f_1^{(q)}$ et f_2 dans la dynamique de $\mathcal{F}_q$. On choisit q_0 tel que $\nu_{q_0} \geqslant 3$ et on supposera partout $q \geqslant q_0$. La largeur σ sera choisie à la fin, pour simplifier les estimations.

2.2. Notons $P(\theta_1, r_1) = \frac{1}{2}r_1^2 + \cos 2\pi\theta_1$ le Hamiltonien du pendule simple, et $\mathcal{P} = \Phi^P$. Le difféomorphisme $\mathcal{F}_*$ est le produit de $\mathcal{P}$ par l'application $\Phi^{\frac{1}{2}r_2^2} : (\theta_2, r_2) \mapsto (\theta_2 + r_2, r_2)$. On note $O = (0, 0)$ le point fixe hyperbolique de Φ^P. L'anneau $\mathcal{A} = \{O\} \times \mathbb{A}$ est invariant et normalement hyperbolique pour $\mathcal{F}_*$.

Comme $q \geqslant q_0$, $\Phi^{\frac{1}{q} f^{(q)}}$ a un contact d'ordre $\geqslant 2$ avec l'identité le long de $\{\theta_1 = 0\}$, donc $\mathcal{F}_q$ et $\mathcal{F}_*$ coïncident sur l'anneau $\mathcal{A}$, qui est encore invariant et normalement hyperbolique pour $\mathcal{F}_q$. Leur restriction à $\mathcal{A}$ est l'application $\Phi^{\frac{1}{2}r_2^2}$ (après identification canonique de $\mathcal{A}$ à $\mathbb{A}$), elle laisse invariant chaque cercle $\mathcal{C}_{r_2^0} = \{(\theta_1, r_1) = O,\ r_2 = r_2^0\} \subset \mathcal{A}$. Ces cercles $\mathcal{C}_{r_2^0}$ sont partiellement hyperboliques pour $\mathcal{F}_q$, et les variétés $W^{\pm}(\mathcal{C}_{r_2^0}, \mathcal{F}_q)$ sont analytiques et Lagrangiennes dans $\mathbb{A}^2$.

Pour un entier q donné, nous nous intéressons ici à la suite $(\mathcal{C}_{k/q})_{k \in \mathbb{Z}}$. On a montré dans [5] l'existence de points hétéroclines pour ces cercles : pour tout k, il existe un point $\omega^{(q,k)}$ dans $W^-(\mathcal{C}_{(k-1)/q}, \mathcal{F}_q) \cap W^-(\mathcal{C}_{k/q}, \mathcal{F}_q)$ très voisin de $\varpi^{(q,k)} = (\theta_1 = \frac{1}{2}, r_1 = 2, \theta_2 = 0, r_2 = k/q)$, au sens où il existe un entier $\bar{q}$ et une constante $\bar{d} \in]0, 1[$ vérifiant $\|\omega^{(q,k)} - \varpi^{(q,k)}\| \leqslant \bar{d}^{\,\nu_q}$ pour tous $q \geqslant \bar{q}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Les orbites instables que nous allons construire passent successivement très près de chacun de ces points hétéroclines.

2.3. Soit M une variété de classe C^1 de dimension d, et soient d_h, d_v deux entiers positifs de somme d. Une (d_h, d_v)-*fenêtre* à valeurs dans M est un C^1-difféomorphisme de $[-1, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$ dans M. Si $\mathcal{D}$ est une telle fenêtre, ses horizontales sont les applications partielles $\mathcal{D}(\cdot, y_v)$, $y_v \in [-1, 1]^{d_v}$, et ses verticales les applications partielles $\mathcal{D}(y_h, \cdot)$, $y_h \in [-1, 1]^{d_h}$; on note enfin $\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}([-1, 1]^d) \subset M$. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux (d_h, d_v)-fenêtres, on dit que $\mathcal{C}$ est *alignée* sur $\mathcal{D}$ lorsque pour tous $y_h \in [-1, 1]^{d_h}$ et $y_v \in [-1, 1]^{d_v}$, la verticale $\mathcal{C}(y_h, \cdot)$ et l'horizontale $\mathcal{D}(\cdot, y_v)$ sont transverses en un unique point a vérifiant $a = \mathcal{C}(y_h, x_v) = \mathcal{D}(x_h, y_v)$ avec $x_h \in]-1, 1[^{d_h}$ et $x_v \in]-1, 1[^{d_v}$. Easton a montré dans [1] le lemme de l'ombre suivant.

Lemme 2.1. *Soit Φ un difféomorphisme C^1 de M. On suppose qu'il existe une famille $(\mathcal{D}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de (d_h, d_v)-fenêtres à valeurs dans M telles que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fenêtre $\Phi \circ \mathcal{D}_k$ soit alignée sur $\mathcal{D}_{k+1}$. Alors il existe un point ζ_0 dans $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ tel que $\Phi^k(\zeta_0)$ soit dans l'image de la fenêtre $\mathcal{D}_k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie :

Proposition 2.2. *Il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ et une constante $d \in]0, 1[$ tels que pour tout entier $q \geqslant q_0$, il existe une famille $(\mathcal{D}^{(q,k)})_{k \in \mathbb{Z}}$ de $(2, 2)$-fenêtres à valeurs dans $\mathbb{A}^2$, avec $\widetilde{\mathcal{D}}^{(q,k)} \subset B_\infty(\varpi^{(q,k)}, d^{\nu_q})$, telle que chaque fenêtre $(\mathcal{F}_q)^q \circ \mathcal{D}^{(q,k)}$ soit alignée sur $\mathcal{D}^{(q,k+1)}$. Il existe donc un point $\zeta^{(q)}$ dans l'image de $\mathcal{D}^{(q,0)}$ tel que $\|(\mathcal{F}_q)^{kq}(\zeta^{(q)}) - \varpi^{(q,k)}\| < d^{\,\nu_q}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, $r_2((\mathcal{F}_q)^{q^2+1}(\zeta^{(q)})) - r_2(\zeta^{(q)}) \geqslant 1$.*

2.4. Esquissons la démonstration. Il est clair que si Φ vérifie les hypothèses du lemme d'Easton, tout difféomorphisme Ψ assez proche de Φ en norme C^1 les vérifie encore. On va donc construire des fenêtres qui s'aligneront sous l'action d'une bonne approximation de $(\mathcal{F}_q)^q$ en norme C^1.

On exploite d'abord la forme particulière de la fonction $f_1^{(q)}$ en introduisant une nouvelle fonction $\bar{f}_1^{(q)}$ de classe C^∞, nulle sur l'ensemble $\{|\theta_1| < \frac{1}{8}\}$, égale à $f_1^{(q)}$ pour $\{|\theta_1 - \frac{1}{2}| < \frac{1}{8}\}$, et arbitrairement prolongée en une fonction C^∞ dans le complémentaire. On note $\bar{f}^{(q)} = \bar{f}_1^{(q)} \otimes f_2$ et $\overline{\mathcal{F}}_q$ le difféomorphisme obtenu en remplaçant $f^{(q)}$ par $\bar{f}^{(q)}$ dans l'expression de $\mathcal{F}_q$. Nous allons définir des domaines qui permettent d'exploiter cette approximation.

Dans l'ouvert $\mathcal{E} = \{|\theta_1| < 1,\ r_1 > 2|\sin \pi\theta_1|\}$ situé au-dessus de la séparatrice, introduisons les coordonnées temps-énergie (τ, h) du pendule. Pour $(\theta_1, r_1) \in \mathcal{E}$, on pose $h = P(\theta_1, r_1)$ et on définit τ par $\Phi^{-\tau P}(\theta_1, r_1) \in \{\theta_1 = \frac{1}{2}\}$. Pour $h > 1$ donné on note $T(h)$ la période de la solution d'énergie h du pendule, et on note $H = T^{-1}$ l'inverse de la fonction ainsi définie. Pour $q \in \mathbb{N}^*$ on pose $h^{(q)} = H(q)$ et $T_q' = T'(h^{(q)})$. Fixons $d \in]0, 1[$ (dont le choix sera précisé dans la suite), et notons $R_*^{(q)}$ le quadrilatère enveloppe convexe des points $A_1 = (-d^{\,\nu_q}, h^{(q)} - 2d^{\,\nu_q}/T_q')$, $A_2 = (d^{\,\nu_q}, h^{(q)})$, $A_3 = (d^{\,\nu_q}, h^{(q)} + 2d^{\,\nu_q}/T_q')$, et $A_4 = (-d^{\,\nu_q}, h^{(q)})$. Notons que cet ensemble est extrêmement mince et presque horizontal, puisqu'on sait que $T_q' \sim \frac{1}{2\pi} \exp(2\pi q)$ lorsque $q \to \infty$ (la Fig. 1 est

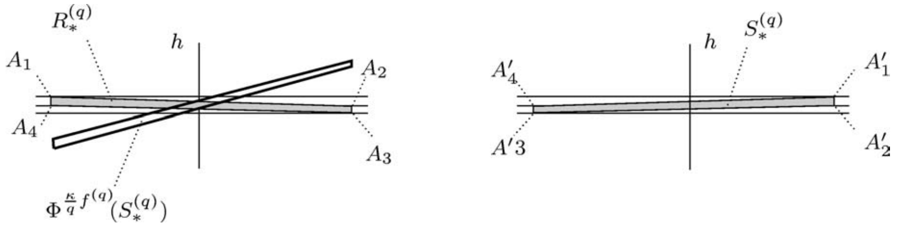

Fig. 1. Les domaines $R_*^{(q)}$, $\Phi^{\frac{1}{q} f^{(q)}}(S_*^{(q)})$ et $S_*^{(q)}$.

donc loin d'être à l'échelle). On introduit enfin le point $a^{(q)} = (0, h^{(q)})$ dans les coordonnées (τ, h), et on pose $\overline{\omega}^{(q,k)} = a^{(q)} \times (0, \frac{k}{q}) \in \mathbb{A}^2$.

Posons $\mathcal{R}_* = R_*^{(q)} \times \mathbb{A}$. On vérifie que la restriction de $(\overline{\mathcal{F}}_q)^q$ à $\mathcal{R}_*^{(q)}$ s'écrit simplement $\Phi^{\frac{1}{q}\bar{f}^{(q)}} \circ \mathcal{F}_*^q$, et nous allons simplifier encore et remplacer $(\overline{\mathcal{F}}_q)^q$ par son jet d'ordre 1 au point $\overline{\omega}^{(q,k)}$. On vérifie que

$$J^1_{\overline{\omega}^{(q,k)}}\left(\Phi^{\frac{1}{q}\bar{f}^{(q)}} \circ \mathcal{F}_*^q\right) = \left[J^1_{a^{(q)}}\left(\Phi^{\frac{f_2(0)}{q}\bar{f}_1^{(q)}} \circ \mathcal{P}^q\right)\right] \times \left[J^1_{(0,k/q)}\left(\Phi^{\frac{1}{q}f_2} \circ (\Phi^{\frac{1}{2}r_2^2})^q\right)\right].$$

Les fenêtres que nous allons définir seront donc aussi des produits. Commençons par le second facteur, et notons $\mathcal{S}_q = \Phi^{\frac{1}{q}f_2} \circ (\Phi^{\frac{1}{2}r_2^2})^q$. Si $\sigma_q(\theta_2, r_2) = (\theta_2, q r_2)$, on vérifie la relation de conjugaison $\mathcal{S}_q = \sigma_q^{-1} \circ \mathcal{S}_1 \circ \sigma_q$, et les jets sont donc aussi conjugués par σ_q. On vérifie aussi que la dérivée en $(0, k/q)$ de $\mathcal{S}_1$ possède deux valeurs propres réelles négatives $\lambda_\pm$ vérifiant $|\lambda_+| < 1 < |\lambda_-|$, on note $\boldsymbol{e}_\pm$ deux vecteurs propres associés. Alors $\boldsymbol{e}_\pm^{(q)} = \sigma_q^{-1}(\boldsymbol{e}_\pm)$ sont deux vecteurs propres de $\mathcal{S}_q$ associés aux mêmes valeurs propres. On introduit la fenêtre linéaire définie par

$$\mathcal{D}_2^{(q,k)}(x^{(h)}, x^{(v)}) = \left(0, \frac{k}{q}\right) + d^{\,\nu_q}\left(x^{(h)}\boldsymbol{e}_+ + x^{(v)}\boldsymbol{e}_-\right), \quad (x^{(h)}, x^{(v)}) \in [-1, 1]^2,$$

il est clair que la fenêtre $[J^1_{(0,k/q)}(\mathcal{S}_q)] \circ \mathcal{D}_2^{(q,k)}$ est alignée sur $\mathcal{D}_2^{(q,k+1)}$.

Passons maintenant au premier facteur. On introduit la $(1,1)$-fenêtre $\mathcal{D}_1^{(q)}$ définie par $\mathcal{D}_1^{(q)}(x) := (x^{(h)} d^{\,\nu_q},\ h^{(q)} + (x^{(h)} - x^{(v)}) d^{\,\nu_q}/T'_q)$, $(x^{(h)}, x^{(v)}) \in [-1, 1]^2$, dont l'image est le quadrilatère $R_*^{(q)}$. L'image de la fenêtre composée $J^1_{a^{(q)}}(\mathcal{P}^q) \circ \mathcal{D}_1^{(q)}$ est l'enveloppe convexe des points $A'_1 = (d^{\,\nu_q}, h^{(q)} - 2d^{\,\nu_q}/T'_q)$, $A'_2 = (d^{\,\nu_q}, h^{(q)})$, $A'_3 = (-d^{\,\nu_q}, h^{(q)} + 2d^{\,\nu_q}/T'_q)$, et $A'_4 = (-d^{\,\nu_q}, h^{(q)})$, et les images de ses verticales sont maintenant presque parallèles à l'axe des τ. Notons $\kappa = f_2(0) < 0$. L'effet de $J^1_{a^{(q)}}(\Phi^{\frac{\kappa}{q}\bar{f}_1^{(q)}})$ est ensuite de « tourner l'axe horizontal » d'un angle de tangente $-\kappa\,\nu_q/q$ dans les coordonnées (τ, e). Il est alors clair que la fenêtre composée $[J^1_{a^{(q)}}(\Phi^{\frac{\kappa}{q}\bar{f}_1^{(q)}} \circ \mathcal{P}^q)] \circ \mathcal{D}_1^{(q)}$ est alignée sur $\mathcal{D}_1^{(q)}$.

Revenons au système total. Il résulte facilement de la construction précédente que la composée par l'application $J^1_{\overline{\omega}^{(q,k)}}(\Phi^{\frac{1}{q}\bar{f}^{(q)}} \circ \mathcal{F}_*^q)$ de la fenêtre $\mathcal{D}^{(q,k)} = \mathcal{D}_1^{(q)} \times \mathcal{D}_2^{(q,k)}$ est alignée sur $\mathcal{D}^{(q,k+1)}$. Comme le choix d'une largeur d'analyticité σ assez petite permet de négliger les termes $d^{\,\nu_q}$ par rapport à $1/q$, et comme les termes d'ordre $\geqslant 2$ que nous avons négligés en considérant les parties affines sont de norme C^1 majorée par $d^{\,2\nu_q}$, on peut montrer que $(\overline{\mathcal{F}}_q)^q \circ \mathcal{D}^{(q,k)}$ est encore alignée sur $\mathcal{D}^{(q,k+1)}$ pour σ bien choisi.

Il faut enfin justifier la validité de l'approximation de $(\mathcal{F}_q)^q$ par $(\overline{\mathcal{F}}_q)^q$. Pour cela on utilise un théorème de conjugaison à la Sternberg au voisinage de la variété normalement hyperbolique $\mathcal{A}$. On montre que les applications $\mathcal{F}_q$ et $\mathcal{F}_*$ sont C^2-conjuguées dans un voisinage de $\mathcal{A}$, indépendant de q, au moyen d'un difféomorphisme dont l'écart à l'identité est en norme C^2 majorée par $\hat{c}^{\,\nu_q}$, où $\hat{c} \in]0, 1[$ est une constante bien choisie. En transportant cette conjugaison au voisinage des domaines précédents, on voit que les applications $\mathcal{F}_* \circ (\mathcal{F}_q)^{q-1}$ et $(\mathcal{F}_*)^q$ y sont conjuguées par deux difféomorphismes dont l'écart à l'identité en norme C^2 est encore d'ordre $c^{\,\nu_q}$, où $c \in]\hat{c}, 1[$. Il suffit alors de choisir la constante d précédente dans l'intervalle $]c, 1[$ pour conclure que $(\mathcal{F}_q)^q \circ \mathcal{D}^{(q,k)}$ est alignée sur $\mathcal{D}^{(q,k+1)}$.

3. Couplage, difféomorphismes sur $\mathbb{A}^n$ et suspension

Dans cette section, on plonge la dynamique précédente dans une famille de perturbations de $\Phi^{\frac{1}{2}r^2}$, tout en conservant ses points errants et les estimations sur leur temps de dérive. La clef de la construction est un lemme de couplage très simple, introduit et démontré dans [6].

Lemme 3.1. *Soient m et m' deux entiers $\geqslant 1$. Soient deux difféomorphismes F et G de $\mathbb{A}^m$ et $\mathbb{A}^{m'}$ respectivement, et un point $a \in \mathbb{A}^{m'}$ N-periodique pour G. Soient $f : \mathbb{A}^m \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{A}^{m'} \to \mathbb{R}$ deux Hamiltoniens définissant des champs de vecteurs complets. On suppose que g vérifie les conditions de synchronisation suivantes $g(a) = 1$; $g(G^k(a)) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant N-1$; $dg(G^k(a)) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant N$. Alors, si $\Psi = F \times G$, on a l'égalité $\Psi^N(x,a) = (\Phi^f \circ F^N(x), a)$ pour tout $x \in \mathbb{A}$.*

On note $(p_j)_{j\geqslant 1}$ la suite des entiers premiers consécutifs, et on pose $N_j = p_{j-(n-3)}\, p_{j-(n-4)} \cdots p_j$. On utilisera une suite d'entiers q_j définis par $q_j = N_j^4[1 + \exp 4\pi\sigma(n-2)p_j]^2$. On va appliquer le lemme de couplage aux difféomorphismes $F = \Phi^{\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)+(1/N_j^2)\cos 2\pi\theta_1}$ et $G = \Phi^{\frac{1}{2}(r_3^2+\cdots+r_n^2)}$, de $\mathbb{A}^2$ et $\mathbb{A}^{n-2}$ respectivement, avec $N = N_j$, le rôle de f étant joué par la fonction $\frac{1}{q_j} f^{(q_j)}$. Le point N_j-periodique sur $\mathbb{A}^{n-2}$ sera $a^{(j)} = (0, \hat{r}^{(j)})$ avec $\hat{r}^{(j)} = (1/p_{j-(n-3)}, \ldots, 1/p_j)$. Il reste donc à construire une fonction $g^{(j)}$ qui vérifie les conditions de synchronisation du lemme. Pour cela, comme dans [6], on introduit pour chaque entier $p \geqslant 1$ la fonction analytique $\eta_p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $\eta_p(\theta) = (\frac{1}{p}\sum_{\ell=0}^{p-1}\cos 2\pi\ell\theta)^2$ et on pose ensuite $g^{(j)}(\theta_3, \ldots, \theta_n) = g_3^{(j)}(\theta_3)\cdots g_n^{(j)}(\theta_n)$, avec $g_i^{(j)}(\theta_i) = \eta_{p_{j-(n-i)}}(\theta_i)$ pour $3 \leqslant i \leqslant n$. On voit facilement que $g^{(j)}$ vérifie les conditions du lemme pour $a^{(j)}$, et que sa norme analytique vérifie $\|g^{(j)}\|_{C^0(V_\sigma(A^n))} \leqslant \mathrm{e}^{4\pi\sigma(n-2)p_j}$.

Posons maintenant $\Psi_j = \Phi^{(1/q_j)S^{(j)}} \circ \Phi^{\frac{1}{2}(r_1^2+\cdots+r_n^2)+(1/N_j^2)\cos 2\pi\theta_1}$ avec $S^{(j)} = f^{(q_j)} \otimes g^{(j)}$. Le lemme de couplage montre immédiatement que la sous-variété $\mathcal{V}^{(j)} = \mathbb{A}^2 \times \{a^{(j)}\}$ est invariante par $(\Psi_j)^{N_j}$, et que la restriction Φ_j de $(\Psi_j)^{N_j}$ à $\mathcal{V}^{(j)}$ vérifie $\Phi_j = \Phi^{(1/q_j)f^{(q_j)}} \circ (\Phi^{\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)+(1/N_j^2)\cos 2\pi\theta_1})^{N_j}$.

Si maintenant on note σ_N l'homothétie $(\theta_1, \theta_2, r_1, r_2) \mapsto (\theta_1, \theta_2, Nr_1, Nr_2)$ sur $\mathbb{A}^2$, il est facile de montrer que Φ_j et $\mathcal{F}_{q_j/N_j}$ sont conjugués par $\sigma_{N_j} : \Phi_j = \sigma_{N_j}^{-1} \circ \mathcal{F}_{q_j/N_j} \circ \sigma_{N_j}$. On en déduit que l'action r_2 du point $u^{(j)} = \sigma_{N_j}^{-1}(\zeta^{(q_j/N_j)})$ subit une dérive d'ordre 1 après q_j^2/N_j itérations de Φ_j. L'action r_2 du point $z^{(j)} = (u^{(j)}, a^{(j)}) \in \mathbb{A}^n$ subit donc la même dérive sous l'action de q_j^2 itérations de Ψ_j. De plus, les estimations (1) et (2) entraînent $\|\frac{1}{q_j}S^{(j)}\|_{C^0(V_\sigma(\mathbb{A}^n))} \leqslant 1/N_j^2$. On en déduit facilement que $\|\Psi_j - \Phi^{\frac{1}{2}r^2}\|_{C^0(V_{\sigma'}(\mathbb{A}^n))} \leqslant 1/N_j^2$ pour σ' assez petit, et le lemme de suspension analytique de [2] montre alors l'existence d'un Hamiltonien H_j sur $\mathbb{A}^{n+1}$ vérifiant les hypothèses du théorème, analytique sur V_ρ, pour un $\rho < \sigma'$ bien choisi.

Références

[1] R. Easton, R. McGehee, Homoclinic phenomena for orbits doubly asymptotic to an invariant three-sphere, Indiana Univ. Math. J. 28 (2) (1979).

[2] S. Kuksin, J. Pöschel, On the inclusion of analytic symplectic maps in analytic Hamiltonian flows and its applications, in: Seminar on Dynamical Systems (St. Petersburg, 1991), in: Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 12, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 96–116.

[3] P. Lochak, J.-P. Marco, Diffusion times and stability exponents for nearly-integrable analytic systems, soumis aux CEMJ.

[4] P. Lochak, A.I. Neishtadt, Estimates in the theorem of N.N. Nekhorocheff for systems with a quasi-convex Hamiltonian, Chaos 2 (1992) 495–499.

[5] J.-P. Marco, Uniform lower bounds of the splitting for analytic symplectic systems, soumis aux Ann. Inst. Fourier.

[6] J.-P. Marco, D. Sauzin, Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems, Publ. Math. I.H.E.S. 96 (2003).

[7] J. Pöschel, Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems, Math. Z. 213 (1993) 187–216.