Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 221–224

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse fonctionnelle

Une propriété de composition dans l'espace H^s

Gérard Bourdaud

Institut de mathématiques de Jussieu, projet d'analyse fonctionnelle, case 186, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu et accepté le 7 décembre 2004

Disponible sur Internet le 5 janvier 2005

Présenté par Yves Meyer

Résumé

On suppose que $1 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, $1/p < s - [s] < 1$ et $[s] \geqslant 1$. Si f et g sont des fonctions de l'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$, telles que g soit à valeurs réelles et que $f(0) = 0$, alors la fonction composée $f \circ g$ appartient à $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$. ***Pour citer cet article : G. Bourdaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

A composition property in the space H^s. Let us assume that $1 < p \leqslant q \leqslant +\infty$, $1/p < s - [s] < 1$, and $[s] \geqslant 1$. If f and g are functions in the Besov space $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$, such that g is real valued and such that $f(0) = 0$, then the composed function $f \circ g$ belongs to $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$. ***To cite this article: G. Bourdaud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction et principaux résultats

On se propose d'établir que l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ est essentiellement stable par composition si $1/2 < s - [s] < 1$ et $[s] \geqslant 1$. On a plus précisément $f \circ g \in H^s(\mathbb{R})$ dès que f et g appartiennent à $H^s(\mathbb{R})$ et que $f(0) = 0$ (cette restriction concernant f disparaissant si on se place dans H^s_{loc} ou dans l'espace H^s du cercle unité). La propriété de composition n'est pas spécifique aux normes de type L^2 : elle est vérifiée également dans une large classe d'espaces de Besov.

Adresse e-mail : bourdaud@ccr.jussieu.fr (G. Bourdaud).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.12.007

Théorème 1.1. *Soient* $1 < p \leqslant q \leqslant +\infty$ *et* $m + (1/p) < s < m + 1$*, pour un entier* $m \geqslant 1$*. Pour toute fonction* $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ *telle que* $f(0) = 0$*, et toute fonction* $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$*, à valeurs réelles, on a* $f \circ g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$*. De plus il existe une constante* $c = c(s, p, q) > 0$ *telle que*

$$\|f \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leqslant c\|f'\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})}\bigl(1 + \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}\bigr)^{s-(1/p)}. \tag{1}$$

Corollaire 1.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.1*, si les fonctions* f_1 *et* f_2*, à valeurs réelles, appartiennent à* $B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{\mathrm{loc}}$*, il en est de même pour* $f_1 \circ f_2$*.*

Corollaire 1.3. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.1*, si les fonctions* f_1 *et* f_2 *appartiennent à* $B_p^{s,q}(S^1, S^1)$*, il en est de même pour* $f_1 \circ f_2$*.*

2. Résultats préparatoires

2.1. Une norme alternative dans l'espace de Besov surcritique

Si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit le module de continuité

$$\Omega_p(f, t) := \biggl(\int_{\mathbb{R}} \sup_{|h| \leqslant t} \bigl|f(x + h) - f(x)\bigr|^p \,\mathrm{d}x\biggr)^{1/p},$$

pour $t > 0$. Suivant Triebel [6, Théorème 3.5.3, p. 194], on dispose de la caractérisation suivante :

Proposition 2.1. *Si* $p > 1$, $1/p < s < 1$ *et* $q \in [1, +\infty]$*, alors une fonction* f *appartient à* $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ *si et seulement si*

$$\|f\|_p + \Biggl(\int_0^\infty \biggl(\frac{\Omega_p(f, t)}{t^s}\biggr)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Biggr)^{1/q} < +\infty.$$

De plus l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}$*.*

2.2. Espaces de Besov et p*-variation*

Si g est une fonction définie sur la droite réelle et $h > 0$, on note $w_p(g, h)$ la borne supérieure des nombres $(\sum_{k=1}^N |g(t_k) - g(t_{k-1})|^p)^{1/p}$, pour toutes les suites $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ telles que $t_k - t_{k-1} \leqslant h$, pour $k = 1, \ldots, N$.

Proposition 2.2. *Pour tous* $p > 1$, $1/p < s < 1$, $q \in [1, +\infty]$*, il existe* $c = c(s, p, q) > 0$ *tel que*

$$\Biggl(\int_0^\infty \biggl(\frac{w_p(g, h)}{h^{s-(1/p)}}\biggr)^q \frac{\mathrm{d}h}{h}\Biggr)^{1/q} \leqslant c\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \quad \forall g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Preuve. D'après le théorème de plongement de Peetre [4, Théorème 5], il existe $c = c(p) > 0$ tel que

$$\sup_{h>0} w_p(g, h) \leqslant c\|g\|_{B_p^{1/p,1}(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

On dispose par ailleurs de l'estimation

$$\sup_{h>0} h^{(1/p)-1} w_p(g, h) \leqslant \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}. \tag{4}$$

Si on définit $\theta \in]0,1[$ par l'égalité $\theta(1-(1/p)) = s-(1/p)$, on a $B_p^{s,q}(\mathbb{R}) = (B_p^{1/p,1}(\mathbb{R}), W^{1,p}(\mathbb{R}))_{\theta,q}$ (voir par exemple [1]). Dès lors l'estimation (2) est une conséquence de (3) et (4). □

2.3. Espaces de Besov sur le cercle

Définition 2.3. Une fonction $f : S^1 \to \mathbb{C}$ appartient à $B_p^{s,q}(S^1)$ si la fonction périodique $x \mapsto f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ appartient à $B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{\mathrm{loc}}$. On note $B_p^{s,q}(S^1, S^1)$ l'ensemble des fonctions $f \in B_p^{s,q}(S^1)$ telles que $|f(z)| = 1$ pour tout $z \in S^1$.

Toute fonction de $B_p^{s,q}(S^1, S^1)$ peut être relevée en une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appartenant à l'espace de Besov local correspondant. On a plus précisément la proposition suivante (voir [5]).

Proposition 2.4. *Soit $s > 1/p$, ou $s = 1/p$ et $q = 1$. Pour toute fonction $f \in B_p^{s,q}(S^1, S^1)$, il existe une fonction $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{\mathrm{loc}}$, à valeurs réelles, telle que $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

3. Preuve du Théorème 1.1

On se limitera au cas $m = 1$, le cas général s'en déduisant facilement grâce au fait que $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach pour $s > 1/p$. On exploitera les mêmes idées que dans le cas limite $s = 1 + (1/p)$ (voir [4, Théorème 7]). On suppose que g est une fonction analytique réelle, le cas général résultant d'un argument classique d'approximation. On est conduit à montrer que $(\int_{-1}^{1} (\frac{U(h)}{|h|^{s-1}})^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|})^{1/q}$ est estimé par le second membre de (1), où l'on a posé

$$U(h) := \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f'\big(g(x+h)\big) - f'\big(g(x)\big) \right|^p \left| g'(x) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

On se limitera ici aux $h > 0$. Le complémentaire de l'ensemble des zéros de g' est la réunion d'une famille $\{I_l\}_{l \in \mathbb{L}}$ d'intervalles ouverts disjoints. On note I_l'' l'ensemble des éléments de I_l dont la distance à l'extrémité droite de I_l est au plus h et on pose $I_l' := I_l \setminus I_l''$. On pose enfin $a_l := \sup_{I_l} |g'|$.

La condition $q \geqslant p$ permettant d'utiliser l'inégalité de Minkowski, il vient

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l \int_{I_l'} \left| f'\big(g(x+h)\big) - f'\big(g(x)\big) \right|^p \left| g'(x) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{q/p} \frac{\mathrm{d}h}{h} \right)^{p/q} \\
&\quad \leqslant \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l a_l^{p-1} \Omega_p^p(f', a_l h) \right)^{q/p} \frac{\mathrm{d}h}{h} \right)^{p/q} \\
&\quad \leqslant \sum_l \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} a_l^{p-1} \Omega_p^p(f', a_l h) \right)^{q/p} \frac{\mathrm{d}h}{h} \right)^{p/q} \\
&\quad = \sum_l a_l^{p-1} a_l^{(s-1)p} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Omega_p(f',t)}{t^{s-1}} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{p/q} \leqslant c \|f'\|^p_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} \sum_l \big(\sup_{I_l} |g'|\big)^{sp-1}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $sp - 1 > p$, le fait que g' s'annule aux extrémités de I_l, et l'inégalité (3), on obtient

$$\sum_l \sup_{I_l} |g'|^{sp-1} \leqslant \Big(\sup_{t>0} w_p(g', t) \Big)^{sp-1} \leqslant c \|g\|^{sp-1}_{B_p^{1+(1/p),1}(\mathbb{R})} \leqslant c \|g\|^{sp-1}_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}.$$

Puisque les intervalles I_l'' sont de longueur au plus h, on peut appliquer la Proposition 2.2, obtenant ainsi

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}}\sum_l \int_{I_l''} \left|f'\big(g(x+h)\big)-f'\big(g(x)\big)\right|^p \left|g'(x)\right|^p \,\mathrm{d}x\right)^{q/p}\frac{\mathrm{d}h}{h}\right)^{1/q}$$

$$\leqslant c\|f'\|_\infty \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p-1}}\sum_l \sup_{I_l''}|g'|^p\right)^{q/p}\frac{\mathrm{d}h}{h}\right)^{1/q}$$

$$\leqslant c\|f'\|_\infty \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{s-1-(1/p)}} w_p(g',h)\right)^{q}\frac{\mathrm{d}h}{h}\right)^{1/q} \leqslant c\|f'\|_\infty \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}.$$

Ceci termine la preuve du Théorème 1.1. Le Corollaire 1.2 en découle aussitôt. Le Corollaire 1.3 résulte du Corollaire 1.2 et de la Proposition 2.4.

4. Remarques conclusives

1. Les conditions imposées à s sont-elles optimales ? C'est clair concernant la valeur critique $1 + (1/p)$: on sait en effet [3] que, pour $s > 0$, toute fonction qui opère sur $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est localement lipschitzienne, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour les fonctions de $B_p^{1+(1/p),q}(\mathbb{R})$. Par contre on a toutes les raisons de penser que le Théorème 1.1 reste vrai sous les seules conditions $s > 1 + (1/p)$ et $1 \leqslant p \leqslant q$; il l'est d'ailleurs dans l'espace de Sobolev classique $W^{m,p}(\mathbb{R})$, pour tout entier $m \geqslant 1 + (1/p)$ (voir [2]).
2. Dans un article à venir, nous montrerons qu'on peut généraliser le Théorème 1.1 au cas où g est une fonction de $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, à condition toutefois de supposer f un peu plus régulière, i.e. $f \in B_p^{s+\varepsilon,q}(\mathbb{R})$, pour un $\varepsilon > 0$.

Références

[1] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces, Springer, Berlin, 1976.

[2] G. Bourdaud, Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev, Invent. Math. 104 (1991) 435–446.

[3] G. Bourdaud, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire 10 (1993) 413–422.

[4] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis, W. Sickel, Superposition operators and functions of bounded p-variation, Rev. Mat. Iberoamericana, à paraître; Prépublication 362, Institut de mathématiques de Jussieu, U.M.R. 7586, Universités Paris VI et Paris VII/CNRS, http://www.institut.math.jussieu.fr.

[5] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu, Lifting in Sobolev spaces, J. Anal. Math. 80 (2000) 37–86.

[6] H. Triebel, Theory of Function Spaces II, Birkhäuser, Basel, 1992.