



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 171–176



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Analyse numérique

# Construction du préconditionneur Neumann–Neumann de décomposition de domaine de niveau 2 pour des problèmes élastodynamiques en grandes déformations

Mikaël Barboteu

*Laboratoire de mathématiques et physiques pour les systèmes, université de Perpignan, 52, avenue Paul-Alduy, 66860 Perpignan, France*

Reçu le 22 septembre 2004 ; accepté après révision le 3 décembre 2004

Disponible sur Internet le 30 décembre 2004

Présenté par Olivier Pironneau

---

## Résumé

Dans cette Note, nous présentons la construction du préconditionneur Neumann–Neumann de décomposition de domaine de niveau 2 pour la résolution des problèmes élastostatiques et élastodynamiques non linéaires. En s'appuyant sur la démarche proposée dans Alart et al. [C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 331 (2000) 399–404] et en utilisant des résultats présentés dans Farhat et al. [Int. J. Numer. Methods Engrg. 38 (1995) 3831–3853] et Fragakis et Papadrakakis [Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193 (2004) 4611–4662], nous donnons les étapes de construction du préconditionneur de niveau 2 qui reposent sur l'introduction d'un espace grossier spécialement adapté au cas des grandes déformations pour les problèmes statiques et dynamiques. **Pour citer cet article : M. Barboteu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Construction of the Balancing domain decomposition preconditioner for elastodynamic finite deformations problems.** In this Note, we present the construction of a Neumann–Neumann domain decomposition preconditioner with scalability properties to solve nonlinear elastostatic and elastodynamic problems. By using the results given in Alart et al. [C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 331 (2000) 399–404] and according to the work realized in Farhat et al. [Int. J. Numer. Methods Engrg. 38 (1995) 3831–3853] and Fragakis and Papadrakakis [Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193 (2004) 4611–4662], we give the construction steps of the two level preconditioner which are based on the introduction of a coarse space especially adapted to finite deformations problems with static and dynamic process. **To cite this article: M. Barboteu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

Adresse e-mail : [barboteu@univ-perp.fr](mailto:barboteu@univ-perp.fr) (M. Barboteu).

1631-073X/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/j.crma.2004.12.006

### Abridged English version

With an aim of presenting the construction of a balancing decomposition preconditioner for static and dynamic finite deformations problems, we use the framework of an additive Schwarz algorithm [5,6]. The method consists in decomposing the interface space  $\bar{V}$  into a coarse and fine component  $\bar{V}_G$  and  $\bar{V}_f$ . For Neumann–Neumann domain decomposition techniques [5,6], the coarse space is defined by adding local rigid components  $\bar{V}_G = \sum_{n=1}^N D^n Z^n$  with  $D^n$  a given partition of the unity on the interface. The fine space is defined by the orthogonality relation (7). The key point is the construction of a coarse space  $Z^n$  of ‘lower energy’ modes especially adapted to finite deformations problems with static and dynamic process. This construction must (if that is necessary) regularize local Neumann problems and also set the lower energy modes (like rigid body motions) to zero in the solutions of local Neumann problems. With finite deformations and especially with dynamic problems, the rigid body motions cannot be detected in the factorization step of the local tangent matrices of the subdomains (due to the regularizing effect of the mass matrix [2,3]).

The solutions of the static and dynamic hyperelastic problems (2) by standard algorithms [4] generate at each increment or time step (subscripted by  $p$ ) a nonlinear system (Eq. (4) for the dynamic case) which can be solved by an iterative Newton method (subscripted by  $i$ ). By using some arguments given in [2] and [3] for the FETI methods, we propose a construction of the two level Neumann–Neumann preconditioner adapted to finite deformations problems with static and dynamic process; this construction is based on the following steps:

- (i) Preliminary step: We choose the local degrees of freedom  $(P_\alpha^n)_{\alpha=1, m^n}$  which permit to compute the  $m^n$  lower energy modes of subdomain  $n$ . This choice can be realized arbitrary or during the factorization of the stiffness matrix  $\mathbf{K}_e^n$  coming from the linear elastostatic problem associated to the nonlinear elastodynamic problem (5).
- (ii) For each Newton iteration  $i$  of each time step  $p$ 
  - (a) We construct the local regularized matrices  $\tilde{\mathbf{K}}_{i,p+1}^n$  by using the degrees of freedom  $(P_\alpha^n)_{\alpha=1, m^n}$  detected in step (i). This regularization is not necessary for dynamic problems due to the contribution of the inertia terms  $\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{a}^n$  which ensures the matrices  $\mathbf{K}_{i,p+1}^n$  to be non singular.
  - (b) We compute the lower energy modes  $(\mathbf{v}_{G\alpha}^n)_{\alpha=1, m^n}$  by solving the (regularized) Neumann problems set on the space  $V^n$  of subdomain displacements functions, see equation (8). This construction must be realized by using the matrix  $\tilde{\mathbf{K}}_{i,p+1}^n$  and not with the matrix  $\mathbf{K}_e^n$ .
  - (c) We define the local rigid space by  $Z^n = \text{vect}(\mathbf{v}_{G\alpha}^n, \alpha = 1, m^n)$ .

For the nonlinear elastostatic case we replace in the steps (a), (b) and (c) the matrix  $\mathbf{K}_{i,p+1}^n$  by the matrix  $\mathbf{K}_{i,p+1}^n$ . With this construction, the two level Neumann–Neumann preconditioner is classically defined by

$$\mathbf{M}_{i,p+1}^{-1} = \mathbf{P}_G + \sum_{n=1}^N (\mathbf{I} - \mathbf{P}_G) \mathbf{D}_{i,p+1}^n (\tilde{\mathbf{S}}_{i,p+1}^n)^{-1} (\mathbf{D}_{i,p+1}^n)^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_G)^t, \quad (1)$$

where  $\mathbf{P}_G$  denotes the orthogonal  $\mathbf{S}$ -projection of  $\bar{V}$  on  $\bar{V}_G$  and  $(\tilde{\mathbf{S}}_{i,p+1}^n)^{-1}$  is the (regularized) Schur inverse matrix. The product of  $(\tilde{\mathbf{S}}_{i,p+1}^n)^{-1}$  by a linear form  $L^n$  is defined through Eq. (10).

The numerical results presented in Section 3 validate the construction of the two level Neumann–Neumann preconditioner. Indeed, we find scalable results for dynamic hyperelastic problems (Fig. 2).

### 1. Problèmes élastodynamiques en grandes déformations et méthodes de décomposition de domaine extensibles

Les problèmes élastodynamiques non linéaires de très grande taille peuvent constituer un domaine d’application des techniques numériques de sous-structuration qui sont efficaces sur ordinateurs parallèles à condition d’utiliser des préconditionneurs adaptés à la nature des phénomènes mécaniques mis en jeu.

Un problème modèle élastodynamique non linéaire de type hyperélasticité compressible écrit dans la configuration de référence  $\Omega$  peut prendre la forme variationnelle suivante, pour tout  $t \in [0; T]$  :

$$\mathbf{u} \in L^2([0; T]; U_0) \quad \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \Pi(t) : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial_g \Omega} \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in U_0 \quad (2)$$

où  $\rho$  est la densité de masse du matériau ;  $\Pi$  est le premier tenseur de Piola–Kirchhoff ;  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  représentent respectivement les densités de forces volumiques et surfaciques ;  $U_0 = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^{\dim}; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_0 \Omega\}$  est l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles. L'Éq. (2) peut être résolue en utilisant, par exemple, un schéma d'intégration implicite de type conservation de l'énergie [4] permettant d'assurer la stabilité de la résolution. Par la suite, on considère la suite d'instant  $(t_p)_{p=1, \dots, P}$  permettant de décomposer l'intervalle de temps  $[0; T]$  en sous-intervalles :  $[0; T] = \bigcup_{p=1}^P [t_p; t_{p+1}]$ . En utilisant un schéma de type point milieu [4], la formulation faible (2) intégrée entre les instants  $t_p$  et  $t_{p+1}$  nous donne :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}_{p+1} - \dot{\mathbf{u}}_p) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \Pi_{\text{algo}}(\mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_p) : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{p+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{v} - \int_{\partial_g \Omega} \mathbf{g}_{p+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

où  $\square_{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\square_p + \square_{p+1})$  et  $\Pi_{\text{algo}}$  est défini selon [4] et a la particularité d'assurer les propriétés de conservation de l'énergie (voir [4]). Après discrétisation, on en déduit le système non linéaire du type

$$\frac{1}{\Delta t} \mathcal{M}(\dot{\mathbf{u}}_{p+1} - \dot{\mathbf{u}}_p) + \mathcal{G}_{\text{algo}}(\mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_p) - \mathbf{q}_{p+\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{où } \dot{\mathbf{u}}_{p+1} = -\dot{\mathbf{u}}_p + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{u}_{p+1} - \mathbf{u}_p) \quad (4)$$

où  $\mathcal{M}$  provient de la discrétisation des termes d'inerties,  $\mathcal{G}_{\text{algo}}(\mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_p)$  est issu de la discrétisation de la partie hyperélastique et  $\mathbf{q}_{p+\frac{1}{2}}$  celle des efforts extérieurs. A chaque incrément  $p$ , la résolution du système (4) par un schéma d'itération linéaire d'indice  $i$  (de type Newton), nous conduit à la résolution des systèmes linéaires de matrice  $\mathbf{K}\mathbf{a}_{i,p+1}$  ayant pour solution  $\Delta \mathbf{u}_{i,p+1} = \mathbf{u}_{i+1,p+1} - \mathbf{u}_{i,p+1}$  :

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_{i,p+1} \Delta \mathbf{u}_{i,p+1} = -\frac{1}{\Delta t} \mathcal{M}(\dot{\mathbf{u}}_{p+1} - \dot{\mathbf{u}}_p) - \mathcal{G}_{\text{algo}}(\mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_p) + \mathbf{q}_{p+\frac{1}{2}} \quad \text{où } \mathbf{K}\mathbf{a}_{i,p+1} = \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{K}_{i,p+1} \quad (5)$$

où  $\mathbf{M}\mathbf{a} = \partial_{\dot{\mathbf{u}}_{p+1}} \mathcal{M}$  représente la matrice de masse et  $\mathbf{K}_{i,p+1} = \partial_{\mathbf{u}_{p+1}} \mathcal{G}_{\text{algo}}(\mathbf{u}_{i,p+1}, \mathbf{u}_p)$  la matrice tangente hyperélastique. On peut noter que la forme du tenseur  $\Pi_{\text{algo}}$  donnée dans [4] conduit à une matrice tangente  $\mathbf{K}_{i,p+1}$  non symétrique.

A chaque itération de Newton, le système linéaire (5) peut alors être résolu par une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement écrite en variable déplacement de type Schur primale [5]. La méthode repose sur la sous-structuration géométrique du domaine  $\Omega$  en  $N$  sous-domaines non recouvrants  $\Omega^n$  ( $n = 1, N$ ) ayant pour interface  $\Gamma^n$ . La méthode du complément de Schur conduit à la résolution d'un problème d'interface réduit obtenu par élimination des degrés de liberté internes. En considérant  $V$  l'espace discret défini à partir de  $U_0$ , le problème interface prend la forme variationnelle

$$\exists \bar{\mathbf{u}} \in \bar{V} \quad \langle \mathbf{S}_{i,p+1} \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = \langle \bar{\mathbf{b}}_{i,p+1}, \bar{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \bar{V} = \text{tr}(V)|_{\Gamma}, \quad \text{avec } \mathbf{S}_{i,p+1} = \sum_{n=1}^N \mathbf{R}^n \mathbf{S}_{i,p+1}^n (\mathbf{R}^n)^t. \quad (6)$$

Les matrices  $\mathbf{S}_{i,p+1}$  et  $\mathbf{S}_{i,p+1}^n$  sont respectivement la matrice du complément de Schur globale (définie sur  $\Gamma$ ) et les matrices du complément de Schur locales (définies sur  $\Gamma^n$ ), obtenues par condensation des degrés de liberté internes. L'opérateur  $\mathbf{R}^n$  représente l'opérateur de prolongement de  $\Gamma^n$  vers  $\Gamma$ . La résolution du problème interface (6) par une méthode itérative (de type gradient conjugué ou GMRES) en utilisant les préconditionneurs Neumann–Neumann à deux échelles ([6] pour les cas symétriques et [1] pour les cas non symétriques) décompose le produit du résidu par la matrice de conditionnement  $\mathbf{M}_{i,p+1}^{-1}$  en la résolution de deux problèmes, l'un fin et local à résoudre sur chaque sous-domaine, l'autre grossier et global posé sur l'espace des « mauvais éléments » à définir. La formulation

adoptée consiste à décomposer l'espace d'interface  $\bar{V}$  en un sous-espace grossier  $\bar{V}_G$  et un sous-espace fin  $\bar{V}_f$ . Pour les méthodes de Neumann–Neumann, l'espace grossier  $\bar{V}_G = \sum D^n Z^n$  est défini par combinaison de composantes locales «de faible énergie» contenues dans  $Z^n$  ( $D^n$  est un opérateur représentant une partition de l'unité sur l'interface allant de  $\bar{V}^n$  dans  $\bar{V}$ ). L'espace fin est défini par orthogonalité,

$$\bar{V}_f = \left\{ \bar{\mathbf{v}}_f \in \bar{V} = \sum_{n=1}^N D^n \bar{V}^n, \langle \mathbf{S} \bar{\mathbf{v}}_f, \bar{\mathbf{v}}_G \rangle = 0, \forall \bar{\mathbf{v}}_G \in \bar{V}_G \right\}. \quad (7)$$

Le choix de  $Z^n$  doit permettre à la fois d'imposer les constantes à zéro dans la solution des problèmes de Neumann locaux et de régulariser (si cela est nécessaire) ces problèmes locaux sans affecter l'algorithme global. Pour plus de détails sur la présentation de la méthode de Schwarz additive on peut se référer aux papiers [5,6] pour le cas symétrique et [1] pour le cas non symétrique.

Dans le cas des problèmes élastostatiques non linéaires mais surtout dans le cas des problèmes elastodynamiques non linéaires, certains modes «de faible énergie» (ou la totalité) liés aux sous-domaines flottants ne sont pas détectés [2,3]. Cela vient d'une part de la modélisation en grandes déformations et d'autre part de la contribution régularisante de la matrice de masse qui rend la matrice  $\mathbf{K}\mathbf{a}_{i,p+1}^n$  non singulière. Pour y remédier, il faut construire arbitrairement les modes de faible énergie relatifs aux problèmes elastodynamiques en grandes déformations. Comme cela est commenté dans [3], l'adaptation de la Balancing method [7] pour les systèmes (5) issus des problèmes elastodynamiques non linéaires reste relativement automatique à condition de bien définir et construire ces modes de faible énergie. Le but de cette note est alors de présenter les étapes de la construction du préconditionneur Neumann–Neumann de niveau 2 pour la résolution des systèmes (5); cela fait l'objet de la Section 2. Les tests numériques présentés dans la Section 3 mettent en évidence l'extensibilité numérique de la méthode.

## 2. Construction du préconditionneur Neumann–Neumann à 2 niveaux

La construction du préconditionneur Neumann–Neumann à deux niveaux, adaptée aux problèmes élastostatique et elastodynamiques en grandes déformations est basée sur les étapes suivantes :

- (i) Etape préliminaire : Choix des degrés de liberté  $(P_\alpha^n)_{\alpha=1,m^n}$  permettant par la suite de calculer les  $m^n$  modes rigides du sous-domaine  $n$ . Cette étape peut se faire en choisissant arbitrairement des degrés de liberté internes aux domaines (3 dans le cas 2D et 6 dans le cas 3D). On peut également considérer le problème d'élasticité linéaire statique associé au problème (2) et identifier les degrés de liberté correspondant aux pivots nuls lors de la factorisation de la matrice de rigidité locale  $K_e^n$  issue du problème élastostatique linéaire associée au sous-domaine  $n$ .
- (ii) Au cours des itérations  $i$  de Newton de chaque pas de temps  $p$  :
  - (a) Construire arbitrairement une matrice régularisée locale  $\widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{a}_{i,p+1}^n$  en utilisant les degrés de liberté  $(P_\alpha^n)_{\alpha=1,m^n}$  détectés lors de l'étape préliminaire (voir [1,5]). On peut remarquer que la procédure de régularisation indispensable pour les problèmes statiques n'est plus nécessaire dans le cas des problèmes dynamiques. En effet, la contribution des termes d'inertie  $\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}\mathbf{a}^n$  rend la matrice  $\mathbf{K}\mathbf{a}_{i,p+1}^n$  non singulière.
  - (b) Calculer les **modes de faible énergie**  $(\mathbf{v}_{G\alpha}^n)_{\alpha=1,m^n}$  en résolvant les systèmes locaux posés sur l'espace  $V^n$  des champs de déplacements définis sur le sous-domaine  $n$

$$\langle (\widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{a}_{i,p+1}^n)^t \mathbf{v}_{G\alpha}^n, \mathbf{w}^n \rangle = \mathbf{w}^n (P_\alpha^n), \quad \forall \mathbf{w}^n \in V^n, \mathbf{v}_{G\alpha}^n \in V^n. \quad (8)$$

On peut noter que cette étape de construction des modes doit être réalisée en utilisant la matrice  $\mathbf{K}\mathbf{a}_{i,p+1}^n$  issue du système (5) et non pas avec la matrice  $\mathbf{K}_e^n$ . Par ailleurs, dans l'Éq. (8), on a considéré le cas général des problèmes non symétriques [1].

- (c) Définir l'espace rigide local par  $Z^n = \text{vect}(\mathbf{v}_{G\alpha}^n, \alpha = 1, m^n)$ .

Avec ce procédé de construction des modes de faible énergie, le préconditionneur de Neumann à deux niveaux s'écrit pour chaque itération de Newton sous la forme classique [7,5,6]

$$\mathbf{M}_{i,p+1}^{-1} = \mathbf{P}_G + \sum_{n=1}^N (\mathbf{I} - \mathbf{P}_G) \mathbf{D}_{i,p+1}^n (\tilde{\mathbf{S}}_{i,p+1}^n)^{-1} (\mathbf{D}_{i,p+1}^n)^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_G)^t, \quad (9)$$

l'opérateur de projection  $\mathbf{P}_G$  de  $\bar{V}$  sur  $\bar{V}_G$  parallèlement à  $\bar{V}_f$  est défini par  $\langle \mathbf{S} \mathbf{P}_G \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}_G \rangle = \langle \mathbf{S} \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}_G \rangle$  pour tout  $\bar{\mathbf{v}}_G \in \bar{V}_G$  et  $\mathbf{P}_G \bar{\mathbf{v}} \in \bar{V}_G$ .

En employant les mêmes arguments utilisés dans [1], on peut voir que ce choix permet d'assurer l'optimalité de la méthode à savoir que les solutions des problèmes de Neumann ont des constantes fixées à zéro. L'action de l'opérateur de Schur régularisé  $(\tilde{\mathbf{S}}_{i,p+1}^n)^{-1}$  sur toute forme linéaire  $L^n$  donne le vecteur  $(\tilde{\mathbf{S}}_{i,p+1}^n)^{-1} L^n = \text{Tr}(\mathbf{u}^n)|_{\Gamma^n}$  obtenu par la résolution des problèmes de Neumann locaux

$$\langle \tilde{\mathbf{K}}_{i,p+1}^n \mathbf{u}^n, \mathbf{w}^n \rangle = L^n(\text{Tr}(\mathbf{w}^n)|_{\Gamma^n}), \quad \forall \mathbf{w}^n \in V^n, \mathbf{u}^n \in V^n. \quad (10)$$

Cela garantit que les solutions  $\mathbf{u}^n = (\tilde{\mathbf{S}}_{i,p+1}^n)^{-1} (\mathbf{D}_{i,p+1}^n)^t (\mathbf{I} - \mathbf{P}_G)^t \bar{\mathbf{r}}$  des problèmes de Neumann locaux ont des constantes  $\mathbf{u}^n(P_\alpha^n)$  fixées à zéro ( $\bar{\mathbf{r}}$  représente le résidu de la méthode de gradient). En effet, par définition des modes de faible énergie  $\mathbf{v}_{G\alpha}^n$ , de la construction de  $\mathbf{u}^n$  et de la projection  $\mathbf{P}_G$ , on a

$$\mathbf{u}^n(P_\alpha^n) = \langle (\tilde{\mathbf{K}}_{i,p+1}^n)^t \mathbf{v}_{G\alpha}^n, \mathbf{u}^n \rangle = \langle \bar{\mathbf{r}}, (\mathbf{I} - \mathbf{P}_G) \mathbf{D}_{i,p+1}^n \mathbf{v}_{G\alpha}^n \rangle = 0. \quad (11)$$

Dans le cas des problèmes élastostatiques non linéaires, on reprend les étapes (a), (b) et (c) en considérant la matrice tangente hyperélastique locale  $\mathbf{K}_{i,p+1}^n$  en lieu et place de la matrice locale  $\mathbf{K}_{i,p+1}^n$ .

### 3. Applications aux problèmes dynamiques hyperélastiques

Pour mettre en évidence la construction présentée, nous considérons comme application l'évolution dynamique ( $\Delta t = 10^{-2}$  s) d'une poutre encadrée à l'une de ses extrémités et soumise à un chargement constant de l'autre (voir Fig. 1). On suppose que le matériau suit une loi hyperélastique compressible de type Ogden. L'étude présentée dans la Fig. 2 a pour objet d'analyser l'extensibilité du solveur interface avec les préconditionneurs Neumann–Neumann de niveau 2 pour des problèmes élastodynamiques non linéaires. Cela consiste à étudier le nombre moyen d'itérations (par itération de Newton) du solveur interface en fonction du nombre de sous-domaines. Pour ce faire, on considère les décompositions d'un maillage régulier (40 166 degrés de liberté) de la poutre en 2, 5, 10, 20, 40, 80 et 160 sous-domaines (voir Fig. 1).

Dans la Fig. 2, on considère 3 versions de préconditionneurs de Neumann–Neumann de niveau 2 :

- le préconditionneur sans adaptation (courbe ◀) où les matrices  $\mathbf{K}_{i,p+1}^n$  sont utilisées pour la détection et la construction des modes de faible énergie.
- le préconditionneur (courbe ◆) où l'on utilise les matrices  $\mathbf{K}_e^n$  issues du problème élastostatique linéaire associé pour la détection et la construction des modes.
- le préconditionneur développé (courbe ■) faisant intervenir  $\mathbf{K}_e^n$  pour la détection des modes (étape (i) de la Section 2) et  $\mathbf{K}_{i,p+1}^n$  pour la construction de ces modes (étape (ii) de la Section 2).

On constate alors que lorsqu'aucune adaptation n'est réalisée, le nombre d'itérations obtenu avec le préconditionneur Neumann–Neumann de niveau 2 (courbe ◀) croît linéairement en fonction du nombre de sous-domaines (tout en restant inférieur à celui de niveau 1, courbe ●). On perd de ce fait l'extensibilité numérique connue de la méthode. Par contre, lorsque la détection des modes de faible énergie est réalisée avec les matrices  $\mathbf{K}_e^n$  (détection valable pour les courbes ◆ et ■), on note une amélioration significative du comportement du solveur interface.

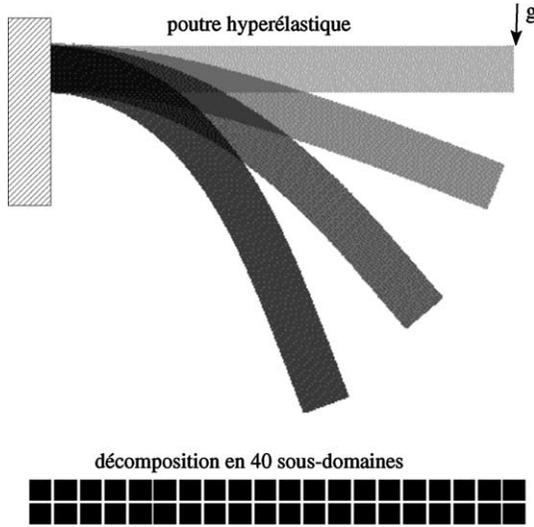


Fig. 1. Description du test numérique.  
Fig. 1. Description of the numerical test.

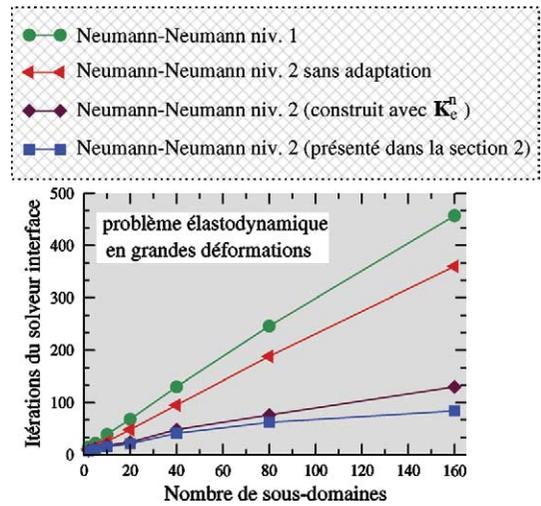


Fig. 2. Extensibilité numérique des solveurs interface.  
Fig. 2. Numerical scalability of the interface solvers.

Cette amélioration est d'autant plus significative (courbe ■) si à cette détection, on ajoute l'utilisation des matrices  $K_{i,p+1}^n$  pour la construction des modes  $(v_{G\alpha}^n)_{\alpha=1,m^n}$ .

En conclusion, l'utilisation du préconditionneur de Neumann–Neumann de niveau 2 présenté dans la Section 2 permet d'obtenir pour des problèmes élastodynamiques en grandes déformations, une certaine extensibilité de la méthode, à savoir une « quasi »-indépendance du solveur interface par rapport au nombre de sous-domaines.

## Références

- [1] P. Alart, M. Barboteu, P. Le Tallec, M. Vidrascu, Méthode de Schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non symétriques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 331 (2000) 399–404.
- [2] C. Farhat, P.-C. Chen, J. Mandel, A scalable Lagrange multiplier based domain decomposition method for time-dependent problems, Int. J. Numer. Methods Engrg. 38 (1995) 3831–3853.
- [3] Y. Fragakis, M. Papadrakakis, The mosaic of high performance domain decomposition methods for structural mechanics – Part II: Formulation enhancements, multiple right-hand sides and implicit dynamics, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193 (2004) 4611–4662.
- [4] O. Gonzalez, Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2000) 1763–1783.
- [5] P. Le Tallec, Domain decomposition methods in computational mechanics, Comput. Mech. Adv. 1 (1994) 121–220.
- [6] P. Le Tallec, M. Vidrascu, Generalized Neumann–Neumann preconditioners for iterative substructuring, in: Proceedings of the Ninth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Bergen, June 96, 1998, pp. 413–425.
- [7] J. Mandel, Balancing domain decomposition, Commun. Appl. Numer. Methods 9 (1993) 233–241.