Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 255–258
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Le nombre des diviseurs unitaires d'un entier dans les progressions arithmétiques

Abdallah Derbal

Département de mathématiques, École normale supérieure d'Alger, BP 92, Vieux Kouba, Alger, Algérie

Reçu le 4 octobre 2004 ; accepté après révision le 30 novembre 2004

Disponible sur Internet le 29 janvier 2005

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Soient $d^*_{k,l}(n)$ et $d_{k,l}(n)$ les fonctions nombre de diviseurs unitaires (voir ci-dessous) et nombre de diviseurs du nombre entier n dans les progressions aritmétiques $\{l+mk\}$ où k et l sont deux entiers premiers entre eux tels que $1 \leqslant l \leqslant k$, et soit pour $n \geqslant 2$

$$F(n;k,l) = \frac{\ln(d_{k,l}(n))\ln(\varphi(k)\ln n)}{\ln n}, \quad F^*(n;k,l) = \frac{\ln(d^*_{k,l}(n))\ln(\varphi(k)\ln n)}{\ln n} \quad \text{et}$$
$$D^*(n;k,l) = \frac{\ln(d_{k,l}(n)/d^*_{k,l}(n))\ln(\varphi(k)\ln n)}{\ln n}$$

où $\varphi(k)$ est l'indicateur d'Euler. La fonction $F(n;k,l)$ fût étudiée dans [A. Derbal, A. Smati, C. A. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 87–90]. Dans cette Note nous étudions les fonctions $F^*(n;k,l)$ et $D^*(n;k,l)$. Nous déterminons explicitement leurs ordres maximaux et nous calculons effectivement le maximum absolu de $F^*(n;k,l)$ pour $k = 1, 2, 3$ et celui de $D^*(n;k,l)$ pour $k = 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13$. ***Pour citer cet article : A. Derbal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

On the number of unitary divisors of whole numbers in arithmetic progressions. Let the functions $d^*_{k,l}(n)$ and $d_{k,l}(n)$ be number of unitary divisors (see below) and number of divisors n in arithmetic progressions $\{l+mk\}$; k and l are integers relatively prime such that $1 \leqslant l \leqslant k$ and let, for $n \geqslant 2$

$$F(n;k,l) = \frac{\ln(d_{k,l}(n))\ln(\varphi(k)\ln n)}{\ln n}, \quad F^*(n;k,l) = \frac{\ln(d^*_{k,l}(n))\ln(\varphi(k)\ln n)}{\ln n} \quad \text{and}$$
$$D^*(n;k,l) = \frac{\ln(d_{k,l}(n)/d^*_{k,l}(n))\ln(\varphi(k)\ln n)}{\ln n},$$

Adresse e-mail : abderbal@yahoo.fr (A. Derbal).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.12.002

where $\varphi(k)$ is Euler's totient. The function $F(n;k,l)$ has been studied in [A. Derbal, A. Smati, C. A. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 87–90]. In this Note we study the functions $F^*(n;k,l)$ and $D^*(n;k,l)$. We give explicitly their maximal orders and we compute effectively the maximum of $F^*(n;k,l)$ for $k=1,2,3$ and that of $D^*(n;k,l)$ for $k=1,3,5,7,8,9,10,11,13$. ***To cite this article: A. Derbal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

Soient k et l deux entiers premiers entre eux tels que $1\leqslant l\leqslant k$. Pour $n=\prod_{p^\alpha\|n}p^\alpha$ on a par définition

$$d^*_{k,l}(n)=\prod_{p^\alpha\|n,\ p\equiv l(k)}2\quad\Bigl(d^*_{1,1}(n)=d^*(n)=\sum_{d|n,\ (d,\ n/d)=1}d=\prod_{p^\alpha\|n}2\Bigr)\quad\text{et}$$

$$d_{k,l}(n)=\prod_{p^\alpha\|n,\ p\equiv l(k)}(\alpha+1)\quad\Bigl(d_{1,1}(n)=d(n)=\sum_{d|n}d=\prod_{p^\alpha\|n}(\alpha+1)\Bigr).$$

L'étude de la fonction $F^*(n;k,l)$ est basée essentiellement sur son évaluation sur les nombres $N_{k,l}(x)=\prod_{p\leqslant x,\ p\equiv l(k)}p$ en lesquels elle prend ses grandes valeurs. Pour la fonction $D^*(n;k,l)$, on a montré qu'elle prend ses grandes valeurs sur des nombres qu'on a appelés $d^*_{k,l}$-hautement composés supérieurs et que nous avons étudié à la Section 3. Ces nombres sont similaires aux nombres hautement composés supérieurs définis et étudiés dans [4], [3] et [1]. Nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 1.1. (1) $\limsup F^*(n;k,l)=\ln 2$ *et il existe une infinité de nombres* n *tels que* $F^*(n;k,l)>\ln 2$. (2) *Pour* $k=1,\,2,\,3$*, le maximum absolu* $\lambda_1(k)$ *est donné dans le Tableau* 1 *du Paragraphe* 2*.*

Théorème 1.2. (1) $\limsup D^*(n;k,l)=(\ln(3/2))/2$ *et il existe une infinité de nombres* n *tels que* $D^*(n;k,l)>(\ln(3/2))/2$. (2) *Pour* $k=1,\,3,\,5,\,7,\,8,\,9,\,10,\,11,\,13$*, le maximum absolu* $\lambda(k)$ *est donné dans le Tableau* 3 *du Paragraphe* 4*.*

Dans cette Note, nous avons utilisé les fonctions classiques de la théorie analytique des nombres $\theta(x;k,l)=\sum_{p\leqslant x,\ p\equiv l(k)}\ln p$ et $\pi(x;k,l)=\sum_{p\leqslant x\ \text{et}\ p\equiv l(k)}1$.

2. Étude de la fonction $F^*(n;k,l)$

Lemme 2.1. *Pour* $m\geqslant 1$*, on note* $p_m=p_m(k,l)$ *le* m*-ième nombre premier congru à* l *modulo* k *et* $N^{k,l}_m=\prod_{i=1}^m p_i$*.*
(1) *Pour tout nombre réel* x *tel que* $p_m\leqslant x<p_{m+1}$ *on a* $N^{k,l}_m=N_{k,l}(x)=\prod_{p\leqslant x,\ p\equiv l(k)}p$*.*
(2) *Si* $m\geqslant 3$*, alors pour tout nombre entier* n*, on a* $N^{k,l}_m\leqslant n<N^{k,l}_{m+1}\Rightarrow F^*(n;k,l)\leqslant F^*(N^{k,l}_m;k,l)$*.*
(3) *Pour* $N=N_{k,l}(x)$ *avec* $x\geqslant p_1(k,l)$*, on a*

$$F^*(N;k,l)=(\ln 2)\frac{\pi(x;k,l)\ln(\varphi(k)\theta(x;k,l))}{\theta(x;k,l)}.$$

Tableau 1
Les maxima absolus $\lambda_1(k)$ de $F^*(n;k,l)$ pour $k=1,2,3$ uniforme pour l

k	$\lambda_1(k)$	l_0	m_0	$N=N^{k,l}_{m_0}$	$d^*_{k,l_0}(N)$	$\sum$
1	0,959324	1	9	$2\times\cdots\times 23$	512	9
2	0,890670	1	15	$3\times\cdots\times 53$	32 768	15
3	0,998279	2	4	$2\times 5\times 11\times 17$	16	4

$\sum$ est le nombre de nombres $N^{k,l}_m\leqslant N^{k,l}_{m_0}$.

Démonstration du Théorème 1.1. Les deux assertions du Théorème 1.1 s'obtiennent par application du Lemme 2.1, le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, les majorations explicites des fonctions $\theta(x;k,l)$ et $\pi(x;k,l)$ données dans [2] et enfin le calcul par ordinateur de $F^*(N;k,l)$ pour $N \leqslant N_{k,l}(25\,000)$. □

3. Les nombres $d^*_{k,l}$-hautement composés supérieurs ($d^*_{k,l}$-h.c.s.)

Lemme 3.1 (et définition). *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un unique nombre $N = N_\varepsilon$ dépendant de ε et vérifiant*

$$\frac{d_{k,l}(n)}{n^\varepsilon d^*_{k,l}(n)} \leqslant \frac{d_{k,l}(N)}{N^\varepsilon d^*_{k,l}(N)} \quad \text{pour } n \leqslant N \quad \text{et} \quad \frac{d_{k,l}(n)}{n^\varepsilon d^*_{k,l}(n)} < \frac{d_{k,l}(N)}{N^\varepsilon d^*_{k,l}(N)} \quad \text{pour } n > N.$$

Démonstration. La limite de la fonction $(d_{k,l}(n))/(n^\varepsilon d^*_{k,l}(n))$ étant nulle, elle atteint son maximum en un nombre fini d'entiers. N est alors le plus grand. □

Lemme 3.2 (et définition). *Pour tout entier $\alpha \geqslant 1$ et pour tout réel $x > 1$, on pose $H(x,\alpha) = \ln(1 + 1/(\alpha + 1))/\ln x$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $H(x,\alpha) = \varepsilon$ possède une unique racine $x_\alpha > 1$. On définit ainsi une suite $(x_\alpha)_{\alpha \geqslant 1}$ dans $]1, +\infty[$. On pose $x_1 = x$. La suite $(x_\alpha)_{\alpha \geqslant 1}$ est strictement décroissante et vérifie les propriétés : $x_2 > \sqrt{2x}$ pour $x \geqslant 6$, $x_\alpha = x^{v(\alpha)}$ où $v(\alpha) = \ln(1 + 1/(\alpha + 1))/\ln(3/2)$.*

Lemme 3.3. *Soient $\varepsilon > 0$, $N = N_\varepsilon$ le nombre $d^*_{k,l}$-h.c.s. associé à ε et $x = x_1$ défini par $H(x,1) = \ln(3/2)/\ln x = \varepsilon$ et soit $p_1 = p_1(k,l)$ le premier nombre premier congru à l modulo k.*
(1)*Tout diviseur premier p de N est congru à l modulo k et si on note α son exposant, il vérifie $\alpha \geqslant 2$, $H(p,\alpha) < \varepsilon \leqslant H(p,\alpha - 1)$ et $x_a < p \leqslant x_{\alpha-1}$.*
(2) *Si $\varepsilon > \varepsilon_1$ où $\varepsilon_1 = H(p_1, 1)$ alors $N = 1$.*
(3) *La structure de N est donnée par*

$$N = \prod_{p \equiv l(k),\ x_2 < p \leqslant x_1} p^2 \times \prod_{p \equiv l(k),\ x_3 < p \leqslant x_2} p^3 \times \cdots \times \prod_{p \equiv l(k),\ x_{m+1} < p \leqslant x_m} p^{m+1}$$

où m est le plus grand indice tel que $x_{m+1} < p_1 \leqslant x_m$; il est égal à la partie entière de $1/(p_1^\varepsilon - 1)$ et est équivalent à $\ln x/((\ln(3/2))\ln p_1)$ $(x \to +\infty)$. On dit aussi que N est le nombre $d^*_{k,l}$-h.c.s. associé à x.

Lemme 3.4. *Pour tout $p \equiv l(k)$ on pose $E_p = \{H(p,\alpha)$ où $\alpha \geqslant 1\}$ et $E = \bigcup E_p$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à ε. On range les éléments de E en une suite décroissante $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ avec $\varepsilon_1 = H(p_1, 1)$.*
(1) *Soient ε_i et ε_{i+1} deux éléments successifs de E. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon > \varepsilon_{i+1}$, on a $N_\varepsilon = N_{\varepsilon_i}$.*
(2) *L'ensemble des nombres $d^*_{k,l}$-h.c.s. est $\{1\} \cup \{N_{\varepsilon_i}$ tel que $\varepsilon_i \in E\}$ et on a $1 < N_{\varepsilon_1} < N_{\varepsilon_2} < N_{\varepsilon_3} < \cdots$.*

Tableau 2
Les sept premiers nombres $d^*_{3,2}$-h.c.s.

Valeur de ε	Valeur de $N = N_\varepsilon$	$D^*(N;3,2)$
$\varepsilon_1 = H(2,1) = 0{,}584962 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_2$	2^2	0,298266
$\varepsilon_2 = 0{,}415037 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_3$	2^3	0,475082
$\varepsilon_3 = 0{,}321928 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_4$	2^4	0,566092
$\varepsilon_4 = 0{,}263034 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_5$	2^5	0,613720
$\varepsilon_5 = 0{,}251929 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_6$	$2^5 \times 5^2$	0,583430
$\varepsilon_6 = 0{,}222392 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_7$	$2^6 \times 5^2$	0,604968
$\varepsilon_7 = 0{,}192645 \geqslant \varepsilon > \varepsilon_8$	$2^7 \times 5^2$	0,617479

Remarque 3.1. Voici à titre d'exemple les sept premiers nombres $d_{3,2}$-h.c.s. qui sont donnés dans le Tableau 2.

Tableau 3
Les maxima absolus $\lambda(k)$ de $D^*(n;k,l)$ pour $k = 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13$ uniforme pour l

k	$\lambda(k)$	l_0	$N = N_\varepsilon$	ε	$d_{k,l_0}(N)/d^*_{k,l_0}(N)$	$\sum$
1	0,551873	1	$2^8 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$	0,169925	33,75	3141
3	0,642297	2	$2^8 \times 5^3$	0,169925	9	1595
5	0,846908	2	2^6	0,222392	3,5	813
7	0,969045	2	2^6	0,222392	3,5	533
8	0,597725	3	3^4	0,203114	2,5	799
9	0,969045	2	2^6	0,222392	3,5	505
10	0,617956	3	3^5	0,165956	3	791
11	0,801214	3	3^5	0,165956	3	319
13	0,837678	3	3^5	0,138646	3	275

$\sum$ désigne le nombre de nombres d^*_{k,l_0}-h.c.s. $\leqslant$ au nombre d^*_{k,l_0}-h.c.s. associé à $x = 25{,}000$.

4. Étude de la fonction $D^*(n;k,l)$

Lemme 4.1. *Soient N_0 le premier nombre $d^*_{k,l}$-h.c.s. tel que $N_0 \geqslant \exp(e^2/\varphi(k))$ et n entier, $n \geqslant 2$.*
(1) *Si $n \leqslant N_0$, alors $D^*(n;k,l) \leqslant D^*(N_0;k,l)$ et si n est tel que $N_0 \leqslant N_1 \leqslant n \leqslant N_2$ où N_1 et N_2 sont deux nombres $d^*_{k,l}$-h.c.s. successifs, alors $D^*(n;k,l) \leqslant \max(D^*(N_1;k,l), D^*(N_2;k,l))$.*
(2) *Soit $\lambda = \lambda(k,l) = \max_{n\geqslant 2} D^*(n;k,l) = D^*(N;k,l)$. Alors N est le nombre $d^*_{k,l}$-h.c.s. associé à $\varepsilon = \lambda(\ln(\varphi(k)\ln N) - 1)/(\ln^2(\varphi(k)\ln N))$.*

Démonstration du Théorème 1.2. Pour N un nombre $d^*_{k,l}$-h.c.s. associé à $x \geqslant p_1$, on a d'après le Lemme 3.3

$$D^*(N;k,l) = \frac{(\sum_{\alpha=1}^{m} \ln((\alpha+2)/(\alpha+1))\pi(x_\alpha;k,l))(\ln(\varphi(k)(2\theta(x;k,l) + \sum_{\alpha=2}^{m}\theta(x_\alpha;k,l))))}{2\theta(x;k,l) + \theta(x_2;k,l) + \cdots + \theta(x_m;k,l)}. \tag{1}$$

D'après le théorème des nombres premiers, on a $D^*(N;k,l) \sim \ln(3/2)/2$ $(x \to +\infty)$. L'assertion (1) du Lemme 4.1 nous permet alors d'affirmer que $\limsup D^*(n;k,l) = \ln(3/2)/2$. En écrivant $\pi(x;k,l) = \frac{x}{\varphi(k)\ln x}(1 + \frac{1}{\ln^2 x} + \mathrm{O}(\frac{1}{\ln^3 x}))$ et $\theta(x;k,l) = \frac{x}{\varphi(k)}(1 + \mathrm{O}(\frac{1}{\ln^2 x}))$ le deuxième membre de (1) serait égal à $\frac{\ln(3/2)}{2}(1 + \frac{1}{\ln x} + \mathrm{O}(\frac{1}{\ln^2 x})) > \frac{\ln(3/2)}{2}$ pour x assez grand. La deuxième assertion s'obtient par application du Lemme 4.1, les majorations explicites de $\theta(x;k,l)$ données dans [5] et le calcul effectif des nombres $d^*_{k,l}$-h.c.s. associés à $x \leqslant 25\,000$. □

Pour $k = 2, 4, 6$ et 12, le maximum absolu de chacune des fonctions $D^*(n;k,l)$ est atteint en un nombre $d^*_{k,l}$-h.c.s. associé à $x > 25\,000$; et on a uniformément pour k et l, $D^*(n;k,l) < 0{,}557248$ pour $n \geqslant 2$.

Références

[1] A. Derbal, A. Smati, Le nombre des diviseurs d'un entier dans les progressions arithmétiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 87–90.

[2] P. Dusart, Autour de la fonction π, thèse de doctorat de l'université de Limoges en Mathématiques appliquées et théorie des nombres, juin 1998.

[3] J.L. Nicolas, G. Robin, Majorations explicites pour le nombre des diviseurs de n, Canad. Math. Bull. 26 (4) (1983) 485–492.

[4] S. Ramanujan, Highly composite numbers, P. Lond. Math. Soc. Ser. 2 14 (1915) 347–400;
S. Ramanujan, Collected Papers, Chelsea, 1962, pp. 78–128.

[5] O. Ramaré, R. Rumely, Primes in arithmetic progressions, Math. Comput. 65 (213) (1996) 397–425.