Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 191–194

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique/Théorie des nombres

Généralisation du critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann

Anne de Roton

I.E.C.N, université Henri Poincaré-Nancy 1, B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, France

Reçu le 22 novembre 2004 ; accepté le 24 novembre 2004

Disponible sur Internet le 12 janvier 2005

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous généralisons dans cet article le critère de Beurling et Nyman, qui concerne la fonction ζ de Riemann, à une large classe de séries de Dirichlet. Nous établissons donc une correspondance entre la densité d'un certain sous-espace de fonctions dans $L^2(0,1)$ et la localisation des zéros d'une série de Dirichlet. Nous utilisons pour obtenir ce résultat la structure de l'espace de Hardy du demi-plan. ***Pour citer cet article : A. de Roton, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

Generalisation of the Beurling–Nyman criterion for the Riemann Hypothesis. We generalise the Beurling–Nyman criterion, already known for the Riemann ζ function, to a larger class of Dirichlet series. We link the density of some subspace of functions in $L^2(0,1)$ and the localization of the zeros of a Dirichlet series. To do so, we use the structure of the Hardy space of the half-plane. ***To cite this article: A. de Roton, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

Les travaux classiques [3,5,9,10] mettent en lumière des relations entre la densité de certains sous-espaces fonctionnels et la répartition des zéros des fonctions analytiques. Beurling et Nyman ont exploité cette idée dans [4] et [2] pour la fonction ζ de Riemann (voir aussi [1]). Ils introduisent l'ensemble $\widetilde{\mathcal{B}}$ des fonctions complexes f définies sur l'intervalle $]0,1]$ par $f(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k\{\frac{\theta_k}{t}\}$, où $n \geqslant 1$, $0 < \theta_k \leqslant 1$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^{n} c_k\theta_k = 0$ et $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x. Le résultat de Nyman s'énonce ainsi :

Théorème 1.1 (Nyman). *Les trois assertions suivantes sont équivalentes* :

Adresse e-mail : deroton@iecn.u-nancy.fr (A. de Roton).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.11.023

(i) $\zeta(s)$ *ne s'annule pas dans le demi-plan* $\Re s > 1/2$;
(ii) $\widetilde{\mathcal{B}}$ *est dense dans* $L^2(0,1)$;
(iii) *la fonction* χ *indicatrice de l'intervalle* $]0,1]$ *est dans l'adhérence de* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *dans* $L^2(0,1)$.

Nous allons dans cette Note généraliser leur résultat à une classe de fonctions comprenant la fonction ζ.

2. Généralisation du théorème de Beurling et Nyman

Dans cette partie, nous supposerons que $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\Re s > 1$ admettant un prolongement méromorphe au demi-plan $\Re s \geqslant \frac{1}{2}$ avec un unique pôle éventuel d'ordre fini m_F en $s = 1$. On supposera de plus que pour tout $\varepsilon > 0$, $a_n = \mathrm{O}(n^{\varepsilon})$.

Définition 2.1. On définit la fonction complémentaire associée à F par :

$$\begin{aligned} \Psi_F : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \operatorname{Res}\left(\frac{x^s}{s} F(s), 1\right) - \sum_{n \leqslant x} a_n. \end{aligned}$$

On définit également la fonction $\Psi_F^{(1)}$ par $\Psi_F^{(1)}(x) = \Psi_F(1/x)$ et l'espace de fonctions suivant :

$$\widetilde{\mathcal{B}_F} = \left\{ f : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_F\left(\frac{\alpha_k}{t}\right), c_k \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < \alpha_k \leqslant 1 \text{ vérifiant (1)} \right\}$$

$$\forall l \in [0, m_F - 1],\ \sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k (\ln \alpha_k)^l = 0. \tag{1}$$

Proposition 2.2. *Si* $\Psi_F^{(1)}$ *est une fonction de* $L^2(0,+\infty)$*, alors pour* $\frac{1}{2} < \Re s < 1$*, on a* :

$$\mathcal{M}\Psi_F^{(1)}(s) = -\frac{F(s)}{s}, \quad \text{où } \mathcal{M}\Psi_F^{(1)} \text{ désigne la transformée de Mellin de } \Psi_F^{(1)}. \tag{2}$$

La transformée de Mellin d'une fonction $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{C}$ mesurable est définie par

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(x) x^{s-1}\, \mathrm{d}x$$

en tout point s tel que l'intégrale converge absolument. Le théorème de Paley–Wiener assure que cette transformation se prolonge en un isomorphisme hilbertien entre $L^2(0,1)$ et l'espace de Hardy H^2 du demi-plan $\Re s > 1/2$.

Théorème 2.3. *Soit* F *une fonction telle que* $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *la fonction* F *ne s'annule pas dans le demi-plan* $\Re s > 1/2$;
(ii) *le sous-espace* $\widetilde{\mathcal{B}_F}$ *est dense dans* $L^2(0,1)$;
(iii) *la fonction indicatrice* χ *de l'intervalle* $]0,1]$ *appartient à l'adhérence de* $\widetilde{\mathcal{B}_F}$ *dans* $L^2(0,1)$.

Nous ne donnons ici qu'un schéma de la démonstration de l'équivalence des deux premières assertions. Pour une démonstration détaillée, on pourra consulter [8].

Nous utiliserons la structure de H^2 et plus précisément le corollaire suivant du théorème de Beurling–Lax :

Lemme 2.4. *Soit $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de fonctions de H^2 n'admettant aucune singularité sur la droite $\Re s = 1/2$ et telle qu'il existe $\alpha \in A$ tel que $F_\alpha(x)$ ne soit pas à décroissance exponentielle losque le réel x tend vers l'infini. Alors le plus petit sous-espace fermé de H^2 invariant par multiplication par $\mathrm{e}^{-\lambda s}$ pour tout $\lambda > 0$ et contenant tous les $F_\alpha, \alpha \in A$ est $B_Z H^2$ où $Z = \bigcap_{\alpha\in A} Z(F_\alpha)$ et B_Z est le produit de Blaschke construit à partir de Z.*

Notons que $\widetilde{\mathcal{B}_F}$ est un sous-espace de $L^2(0,1)$ invariant par l'action du semi-groupe des contractions donc (théorème de Paley–Wiener) $\mathcal{M}\overline{\widetilde{\mathcal{B}_F}}$ est un sous-espace fermé de H^2 invariant par multiplication par $\mathrm{e}^{-\lambda s}$, $\lambda > 0$.

D'après la Proposition 2.2, toute fonction G de $\mathcal{M}\widetilde{\mathcal{B}_F}$ s'écrit sous la forme $G(s) = \mathcal{M}g(s) = -\frac{F(s)}{s}\sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k^s$.

À l'aide de cette écriture, on montre que les hypothèses du lemme sont bien vérifiées par la famille de fonctions $\mathcal{M}\widetilde{\mathcal{B}_F}$ et que $\bigcap_{G\in\mathcal{M}(\widetilde{\mathcal{B}_F})} Z_G = Z_F$, où Z_F (respectivement Z_G) désigne le multi-ensemble des zéros de F (respectivement de G) comptés avec leur multiplicité dans le demi-plan $\{\Re s > 1/2\}$.

Si B_{Z_F} est le produit de Blaschke défini à partir de Z_F, on a donc $\mathcal{M}\overline{\widetilde{\mathcal{B}_F}} = B_{Z_F} H^2$. L'utilisation du théorème de Paley–Wiener permet d'en déduire l'équivalence recherchée.

3. Lien avec l'hypothèse de Riemann généralisée

Définition 3.1. On dira qu'une fonction F appartient à la classe de Selberg S si F vérifie les conditions suivantes :

(i) pour $\Re s > 1$, $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ est une série de Dirichlet absolument convergente ;
(ii) il existe un entier naturel m tel que $(s-1)^m F(s)$ soit une fonction entière d'ordre fini ;
(iii) la fonction F satisfait une équation fonctionnelle de la forme :

$$\Phi(s) = \omega\overline{\Phi(1-\bar{s})} \quad \text{où } \Phi(s) = \alpha Q^s \gamma(s) F(s),$$

avec $\gamma(s) = \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$, $\lambda_j > 0$, $\Re\mu_j \geqslant 0$, $Q > 0$ et $|\alpha| = 1$;
(iv) pour tout $\varepsilon > 0$, $a(n) = \mathrm{O}(n^\varepsilon)$;
(v) pour $\Re s$ assez grand, $\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n n^{-s}$ où $b_n = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier et $b_n = \mathrm{O}(n^\theta)$ pour un $\theta < 1/2$.

On notera $d = 2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j$, le degré de F. On appelera zéros non triviaux de F les zéros de parties réelles comprises entre 0 et 1

Conjecture 1. On conjecture que les zéros non triviaux de F sont de partie réelle égale à $1/2$.

C'est l'hypothèse de Riemann généralisée pour la fonction F. Elle est équivalente à la non-annulation de la fonction F dans le demi-plan $\Re s > 1/2$.

Conjecture 2. On conjecture que pour tout $\varepsilon > 0$, $F(1/2 + \mathrm{i}\tau) = \mathrm{O}_\varepsilon((1+|\tau|)^\varepsilon)$.

C'est l'hypothèse de Lindelöf généralisée pour la fonction F.

En suivant la méthode que Titchmarsch utilisait dans [11] pour l'étude de la fonction ζ de Riemann, on démontre que l'hypothèse de Riemann pour une fonction F de la classe de Selberg entraîne l'hypothèse de Lindelöf pour cette même fonction.

On montre d'autre part que $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$ si et seulement si $F(1/2+\mathrm{i}t)/(1/2+\mathrm{i}t) \in L^2(\mathbb{R})$, ce qui permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Soit F une fonction de la classe de Selberg S. Alors la fonction F vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée si et seulement si $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$ et le sous-espace $\widetilde{\mathcal{B}_F}$ est dense dans $L^2(0,1)$.*

La démonstration de ce théorème se trouve dans [6] et [8].

4. Autre critère

Nous avons démontré dans [7] que pour une fonction F de la classe de Selberg de degré inférieur à 4, la fonction $\Psi_F^{(1)}$ est de carré intégrable. Afin d'obtenir un critère sans restriction sur le degré de F, on introduit une fonction complémentaire lissée.

Définition 4.1. Soit F une fonction de la classe de Selberg. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction $\Psi_{k,F}$, fonction complémentaire d'ordre k associée à F par :

$$\Psi_{k,F}(x) = \mathrm{Res}\left(\frac{F(s)x^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}, 1\right) - \frac{1}{k!}\sum_{n\leqslant x} a_n\left(1-\frac{n}{x}\right)^k.$$

On définit également la fonction $\Psi_{k,F}^{(1)}$ par $\Psi_{k,F}^{(1)}(x) = \Psi_{k,F}(1/x)$ et le sous-espace suivant *:*

$$\widetilde{\mathcal{B}_{k,F}} = \left\{ f : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_{k,F}\left(\frac{\alpha_k}{t}\right) \in \mathcal{B}_{k,F},\ n \in \mathbb{N},\ c_k \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < \alpha_k \leqslant 1 \text{ vérifiant (1)} \right\}.$$

Si $k > \frac{d}{4}$, on montre que $\Psi_{k,F}^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$. Avec les notations précédentes, on a le résultat suivant.

Théorème 4.2. *Soit F une fonction de la classe de Selberg. Soit k un entier vérifiant $k > \frac{d}{4}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *la fonction F vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée* ;
(ii) *le sous-espace $\widetilde{\mathcal{B}_{k,F}}$ est dense dans* $L^2(0,1)$;
(iii) *la fonction indicatrice χ de l'intervalle* $]0,1]$ *appartient à l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{B}_{k,F}}$ dans $L^2(0,1)$.*

La démonstration de ce dernier théorème est analogue à celle du Théorème 2.3. Pour une démonstration détaillée, on pourra consulter [6].

Remerciement

Merci à Michel Balazard et Emmanuel Kowalski pour leurs conseils.

Références

[1] M. Balazard, E. Saias, The Nyman-Beurling equivalent form for the Riemann hypothesis, Expo. Math. 18 (2000) 131–138.
[2] A. Beurling, A closure problem related to the Riemann Zeta-function, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 41 (1955) 312–314.
[3] N. Levinson, Gap and Density Theorems, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. XXVI, 1940.
[4] B. Nyman, On some groups and semigroups of translations, Thèse, Uppsala, 1950.
[5] R.E.A.C. Paley, N. Wiener, The Fourier Transform in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. XIX, 1934.
[6] A. de Roton, Généralisaton du critère de Beurling–Nyman à la classe de Selberg, Thèse, Bordeaux, 2003.
[7] A. de Roton, On the mean square of an error term for an extended Selberg's class, soumis.
[8] A. de Roton, Généralisation du critère de Beurling–Nyman pour l'hypothèse de Riemann, soumis.
[9] L. Schwartz, Étude des sommes d'exponentielles, Hermann, Paris, 1959.
[10] O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionnen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Ann. 77 (1916) 482–496.
[11] E.C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford University Press, 1951.