Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 147–150

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Compactification des champs de chtoucas de Drinfeld

Tuan Ngo Dac

Département de mathématiques, bâtiment 425, université de Paris-sud, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 9 octobre 2004 ; accepté le 5 novembre 2004

Présenté par Jean-Marc Fontaine

Résumé

On présente ici une autre façon de construire les compactifications des champs de chtoucas de Drinfeld introduites par Lafforgue. La méthode est basée sur la variation des quotients dans la théorie des invariants géométriques étudiée par Thaddeus et Dolgachev–Hu. ***Pour citer cet article : Tuan Ngo Dac, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Compactification of the stacks of Drinfeld's shtukas. Another way to construct the compactifications of the stacks of Drinfeld's shtukas introduced by Lafforgue is presented. The method is based on the variation of GIT quotients studied by Thaddeus and Dolgachev–Hu. ***To cite this article: Tuan Ngo Dac, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Chtoucas de Drinfeld : rappels

Soit X une courbe algébrique projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ à q éléments. Le champ $\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$ classifie des couples $(\mathcal{L}_i, l_i)_{1\leqslant i\leqslant r-1}$ où $\mathcal{L}_i$ est un fibré inversible et l_i est une section globale de $\mathcal{L}_i$. Puis on définit le champ algébrique PreCht^{r} des *pré-chtoucas itérés* comme le foncteur qui à chaque schéma S associe les données de

– un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ localement libre de rang r sur $X \times S$,
– une modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ où $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{E}''$ sont supportés par les graphes de deux morphismes $0 : S \to X$ et $\infty : S \to X$ et sont localement libres de rang 1,
– des couples $(\mathcal{L}_i, l_i)_{1\leqslant i\leqslant r-1} \in \mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}(S)$,

Adresse e-mail : tuan.ngodac@math.u-psud.fr (Tuan Ngo Dac).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.11.006

– un homomorphisme complet $\mathcal{E}^\sigma \Rightarrow \mathcal{E}''$ de type $(\mathcal{L}_i, l_i)^{\otimes(q-1)}_{1\leqslant i\leqslant r-1}$, autrement dit une famille d'homomorphismes

$$u_s : \bigwedge^s \mathcal{E}^\sigma \otimes \bigotimes_{1\leqslant i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(q-1)(s-i)} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}'', \quad 1\leqslant s\leqslant r,$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) Pour n'importe quel choix de trivialisations de $\mathcal{E}''$, $\mathcal{E}^\sigma$ et des $\mathcal{L}_i$ localement sur S, la famille $(u_1,\dots,u_r, l_1^{q-1},\dots,l_{r-1}^{q-1})$ appartient au schéma des homomorphismes complets Ω^r, cf. [2, pages 1003–1006].

(ii) Génériquement au-dessus de tout point géométrique de S, chaque u_s qui peut se voir sous la forme

$$u_s : \Bigl(\bigwedge^s \mathcal{E} \otimes \bigotimes_{1\leqslant i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\Bigr)^\sigma \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E} \otimes \bigotimes_{1\leqslant i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}, \quad 1\leqslant s\leqslant r,$$

est tel que $\ker u_s$ et $(\operatorname{Im} u_s)^\sigma$ soient en somme directe.

Ce champ est algébrique au sens d'Artin et localement de type fini, cf. [2, Proposition 1.5]. Soit $\underline{r} = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ une famille vérifiant $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = r$. On considère le sous-champ localement fermé $\mathrm{PreCht}^r_{\underline{r}}$ de PreCht^r classifiant les pré-chtoucas itérés de type $\underline{r}$ défini en demandant que l_s soit nulle si $s\in\underline{r}$ et inversible si $s\notin\underline{r}$. On identifie les fibrés inversibles $(\mathcal{L}_i)_{i\notin\underline{r}}$ munis d'une section globale inversible l_i avec le couple $(\mathcal{O}_S, 1)$. Alors l'homomorphisme complet consiste en la donnée de

– d'une part, une filtration croissante $0 \subsetneq \mathcal{E}''_{r_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}''_{r_k} = \mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}''$ par des sous-fibrés maximaux de rangs $r_1,\dots,r_k$ respectivement,
– d'autre part, une filtration décroissante $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\sigma \supsetneq \overline{\mathcal{E}}_{r_1} \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{\mathcal{E}}_{r_k} = 0$ de $\mathcal{E}^\sigma$ par des sous-fibrés maximaux de corangs $r_1,\dots,r_k$ respectivement,
– des isomorphismes $\overline{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{E}}_s \otimes \bigotimes_{i\in\underline{r},\, i<s} \mathcal{L}_i{}^{\otimes(q-1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}$, $s\in\underline{r}$, où s^- désigne le prédécesseur de s dans $\underline{r}\cup\{0\}$.

Le champ $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$ des *chtoucas itérés de type* $\underline{r}$ est l'ouvert de $\mathrm{PreCht}^r_{\underline{r}}$ soumis aux conditions suivantes :

– Si on note $\mathcal{E}'_s = \mathcal{E}''_s$ $(s\in\underline{r})$, alors tous les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_s$ sont sans torsion.
– Pour tout $s\in\underline{r}$, le morphisme $\mathcal{E}'_s \to \mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est surjectif. On note $\mathcal{E}_s$ son noyau.
– Pour tout $s\in\underline{r}$, $\overline{\mathcal{E}}_{s^-} + \mathcal{E}^\sigma_s = \mathcal{E}^\sigma$.

Puis le champ $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ des *chtoucas itérés* est l'unique sous-champ ouvert de PreCht^r dont, pour toute famille $\underline{r}$, la trace dans $\mathrm{PreCht}^r_{\underline{r}}$ est $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$. Étant donné un entier d, on définit le sous-champ $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}} \subset \overline{\mathrm{Cht}^r}$ classifiant les chtoucas itérés de rang r et de degré d. En associant à un chtouca itéré son pôle et son zéro, on définit un morphisme $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}} \to X\times X$.

On considère un chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}}$ de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \dots, r_k)$. À partir de ce chtouca itéré, on peut construire des vrais chtoucas (dont certains sont des chtoucas à gauche), cf. [2, pages 1009–1010] : d'abord, si $s = r_1$, on note $E_s = \mathcal{E}_s$ et $E'_s = \mathcal{E}'_s = \mathcal{E}''_s$. Alors, on montre que $\widetilde{E}_s = (E_s \hookrightarrow E'_s \hookleftarrow E^\sigma_s)$ est un chtouca à droite de rang r_1 dont le pôle est le pôle ∞ du chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}}$. Pour chaque $s\in\underline{r}$ et $s > r_1$, on note $E_s = \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-} \otimes \bigotimes_{i\in\underline{r},\, i<s} \mathcal{L}_i$, $E'_s = (\overline{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}^\sigma_s) \otimes \bigotimes_{i\in\underline{r},\, i<s} \mathcal{L}_i$. On peut montrer que $\widetilde{E}_s = (E_s \hookleftarrow E'_s \hookrightarrow E^\sigma_s)$ est un chtouca à gauche. De plus, le pôle de $\widetilde{E}_s$ coïncide avec le zéro de son prédécesseur $\widetilde{E}_{s^-}$ et le zéro du dernier chtouca $\widetilde{E}_{r^-}$ coïncide avec le zéro 0 du chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Définition 1.1. Appelons *polygone* une application $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ telle que $p(0) = p(r) = 0$ et que p soit affine sur chaque intervalle $[i-1, i]$ pour tout $0 < i \leqslant r$. Un polygone est dit *assez convexe par rapport à* μ si tous les entiers $(p(i)-p(i-1))-(p(i+1)-p(i))$ $(0<i<r)$ sont assez grands par rapport à μ. Étant donné un entier d, un polygone p est d-entier si pour tout entier $0\leqslant i\leqslant r$, le nombre $p(i)+\frac{i}{r}d$ est un entier.

Proposition 1.2 [2]. *Soient d un entier et p un polygone qui est d-entier et assez convexe en fonction de la courbe X et de r. Alors, il existe un unique sous-champ ouvert $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,\bar{p}\leqslant p}$ de $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}$ tel qu'un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ de type $\underline{r}=(r_1,r_2,\ldots,r_k)$ du champ $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}$ appartienne à $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,\bar{p}\leqslant p}$ si et seulement si :*

- *Si $s=r_1$, alors le chtouca $\widetilde{E}_s=(E_s\hookrightarrow E'_s\hookleftarrow E^\sigma_s)$ a la propriété : soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré maximal de $E_s=\mathcal{E}_s$, alors $\deg\mathcal{F}$ est majoré par $\deg\mathcal{F}\leqslant\frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r}d+p(\mathrm{rg}\,\mathcal{F})$.*
- *Si $s\in\underline{r}$ et $s>r_1$, alors le chtouca $\widetilde{E}_s=(E_s\hookleftarrow E'_s\hookrightarrow E^\sigma_s)$ a la propriété : soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré maximal non nul de $E'_s=\mathcal{E}^\sigma_s\cap\overline{\mathcal{E}}_{s^-}$, alors $\deg\mathcal{F}$ est majoré par $\deg\mathcal{F}\leqslant\frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r}d+p(s^-+\mathrm{rg}\,\mathcal{F})-p(s^-)-1$.*

Théorème 1.3 [2]. *Soient d un entier et p un polygone qui est d-entier et assez convexe en fonction de la courbe X et de r. Alors, le morphisme $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,\bar{p}\leqslant p}\to X\times X$ est propre.*

2. Variation des quotients GIT

On fixe un polygone $p_0:[0,r]\to\mathbf{R}^+$ assez convexe en fonction de la courbe X et de r. On choisit un entier positif ϵ très grand par rapport à p_0, X et r ; un entier positif M très grand par rapport à ϵ, p_0, X et r ; et un entier m très grand par rapport à M, ϵ, p_0, X et r. Ensuite, on choisit m niveaux $\{N_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ disjoints sans multiplicités et de longueur M et on pose $N=\coprod_{1\leqslant i\leqslant m}N_i$. Enfin, on choisit un entier d très grand par rapport à m, M, ϵ, p_0, X et r et on pose $h=d+(1-g)r$. Soient ϵ_0, ϵ_1 deux nombres entiers positifs tels que $r\epsilon_0\frac{\epsilon}{h-\epsilon}=r!m\epsilon_1$.

Soit $\mathcal{C}^{r,N}$ le champ qui à chaque schéma S associe le groupoïde des familles de

- un $\mathcal{O}_{N\times S}$-module $\mathcal{F}$ localement libre de rang r,
- des couples $(\mathcal{L}_i,l_i)_{1\leqslant i\leqslant r-1}\in\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}(S)$,
- un homomorphisme complet $\mathcal{F}^\sigma\Rightarrow\mathcal{F}$ de type $(\mathcal{L}_i,l_i)^{\otimes(q-1)}_{1\leqslant i\leqslant r-1}$, ce qui est équivalent à donner une famille d'homomorphismes $u_{s,N}:(\bigwedge^s\mathcal{F}\otimes\bigotimes_{i<s}\mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)})^\sigma\to\bigwedge^s\mathcal{F}\otimes\bigotimes_{i<s}\mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}$, $1\leqslant s\leqslant r$, qui sont non nuls en tout point géométrique de $N\times S$ et sont reliés par certaines conditions fermées.

Puis on considère le champ $\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$ défini en classifiant les homomorphismes $v_{s,N}:\bigwedge^s\mathcal{F}\otimes\bigotimes_{i<s}\mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\to\bigwedge^s\mathcal{O}^r_{N\times S}$, $1\leqslant s\leqslant r$, tels que $v_{r,N}$ ne soit pas nul en tout point géométrique de $N\times S$ et que pour tout entier $1\leqslant s\leqslant r$, on ait $v^\sigma_{s,N}=v_{s,N}u_{s,N}$ et $\bigwedge^s v_{1,N}=l_1^{s-1}l_2^{s-2}\cdots l_{s-1}v_{s,N}$.

Dans $\mathcal{C}^{r,N}$, on considère l'ouvert dense $\mathcal{C}^{r,N}_\varnothing$ dont toutes les sections globales l_i $(1\leqslant i\leqslant r-1)$ sont inversibles. Ce champ est le quotient de la restriction à la Weil GL_r^N de GL_r à N par l'action de lui-même par conjugaison tordue $(u,g)\mapsto(g^\sigma)^{-1}\circ u\circ g$. Puis on considère le classifiant $\mathcal{C}^r_{N,\varnothing}=\bullet/\mathrm{GL}_r^N$ et son revêtement de Lang $\mathcal{C}^r_{N,\varnothing}=\mathcal{C}\times_{\mathcal{C}^{r,N}}\mathcal{C}^{r,N}_\varnothing\to\mathcal{C}^{r,N}_\varnothing$. On note $\mathcal{C}^r_N$ la fermeture algébrique de $\mathcal{C}^r_{N,\varnothing}$ dans $\mathcal{C}$. L'action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ sur $\mathcal{C}^r_{N,\varnothing}$ s'étend en une action sur $\mathcal{C}^r_N$ et le morphisme $\mathcal{C}^r_N\to\mathcal{C}^{r,N}$ est propre.

Puis on forme $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}_N$ comme produit fibré de $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}\times_{X\times X}(X-N)^2$ et de $\mathcal{C}^r_N$ au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$. Alors, le morphisme $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}_N\to\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}\times_{X\times X}(X-N)^2$ est représentable et fini. Le champ $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}_N$ est muni d'une action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ et l'espace grossier associé à $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}\times_{X\times X}(X-N)^2$ est le quotient de celui de $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d}_N$ par ce groupe fini.

On note $\mathcal{Y}$ le champ défini au-dessus de l'ouvert $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d}} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,\bar{p}\leqslant p_0} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$ de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d}} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$ en classifiant les homomorphismes surjectifs (modulo l'action de $\mathbb{G}_m$) $\mathcal{O}_X^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ pour lesquels le morphisme induit $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X^h) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{E})$ est un isomorphisme. Alors le champ $\mathcal{Y}$ est un $\mathrm{PGL}(h)$-torseur au-dessus du champ $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d}} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,\bar{p}\leqslant p_0} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$.

Soit $\mathrm{Pic}^d(X)$ le composant de degré d du schéma de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ de X. On note $p : X \times \mathrm{Pic}^d(X) \to \mathrm{Pic}^d(X)$ la projection naturelle et $\mathcal{M}$ le fibré inversible universel sur $X \times \mathrm{Pic}^d(X)$. L'espace de Gieseker est défini comme $\mathcal{Z}_0 := \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\bigwedge^r \mathcal{O}^h_{\mathrm{Pic}^d(X)}, p_*\mathcal{M}))$. Soit s un point géométrique de $\mathrm{Pic}^d(X)$ qui correspond au fibré inversible $\mathcal{L}$ sur $\overline{X}$. Alors, la fibre de $\mathcal{Z}_0$ en s est l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\bigwedge^r k^h, \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{L})))$. Enfin, on note $\mathcal{Z}$ l'espace produit $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \times \prod_{1\leqslant i\leqslant m} \mathbb{P}(\bigoplus_{1\leqslant s\leqslant r} \mathrm{Hom}(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i})^{\otimes r!/s})$. Le groupe $\mathrm{PGL}(h) \times \mathbb{G}_m^{r-1} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ agit de manière évidente sur $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$. On définit facilement un morphisme $\phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ qui est $\mathrm{PGL}(h) \times \mathbb{G}_m^{r-1} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$-équivariant. Il existe une unique $\mathrm{PGL}(h)$-linéarisation du fibré ample $\mathcal{O}(\epsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1\leqslant i\leqslant m} \mathcal{O}(\epsilon_1))$. Par contre, on associe à toute suite de rationnels $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ telle que les $\{\alpha_s\}_{1\leqslant s\leqslant r}$ soient dans $(0,1)$ et que leur somme vale 1 une $\mathrm{PGL}(h) \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré ample $\mathcal{O}(\epsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1\leqslant i\leqslant m} \mathcal{O}(\epsilon_1))$ qui dépend linéairement de $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, les coefficients étant indépendants de i. Voici l'application de la variation des quotients GIT dans notre cas, cf. [3,1] :

Théorème 2.1.

- *Le morphisme $\phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ est représentable et quasi-projectif.*
- *Soit p un polygone assez convexe en fonction de X et de r, entier par rapport à d et majoré par p_0. Étant donnée une suite de rationnels $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ telle que les $\{\alpha_s\}_{1\leqslant s\leqslant r}$ soient dans $(0,1)$ et que leur somme vale 1, on considère la $\mathrm{PGL}(h) \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré $\mathcal{O}(\epsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1\leqslant i\leqslant m} \mathcal{O}(\epsilon_1))$ associée à $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Supposons que les nombres $q(t) = \sum_{1\leqslant s\leqslant t} \alpha_s \epsilon + \sum_{t<s\leqslant r} \frac{t}{s} \alpha_s \epsilon - \frac{t}{r}\epsilon$, $0 \leqslant t \leqslant r$, vérifient que pour tout entier $0 < t < r$, on ait $p(t) < q(t) < p(t) + 1$ et $q(t) - p(t) > q(t+1) - p(t+1)$.*

  Alors $\phi(y)$ est semistable si et seulement si y appartient à la préimage de $\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,\bar{p}\leqslant p}} \times_{X\times X} (X - N)^2 \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$ dans $\mathcal{Y}$.
- *Supposons que $q > r(r-1)/2$. Alors, le morphisme $\mathcal{Y}^{ss} \to (X - N)^2 \times \mathcal{Z}^{ss}$ est propre. En particulier, sous la même hypothèse, le morphisme $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\bar{p}\leqslant p}} \times_{X\times X} (X - N)^2 \to (X - N)^2$ est propre.*

Corollaire 2.2. *Supposons que $q > r(r-1)/2$ et que le polygone p est d-entier et assez convexe en fonction de X et de r. Alors, le morphisme $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,\bar{p}\leqslant p}} \to X \times X$ est propre.*

Remerciements

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans le soutien et les conseils de Laurent Lafforgue, mon directeur de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Références

[1] I. Dolgachev, Y. Hu, Variation of geometric invariant theory quotients, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 87 (1998) 5–56.
[2] L. Lafforgue, Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld, J. Amer. Math. Soc. 11 (4) (1998) 1001–1036.
[3] M. Thaddeus, Geometric invariant theory and flips, J. Amer. Math. Soc. 9 (3) (1996) 691–723.