

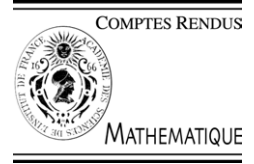


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 63–68



<http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/>

Analyse numérique/Problèmes mathématiques de la mécanique Inégalités d'entropie pour un schéma de relaxation

Christophe Berthon ^{a,b}

^a MAB, UMR-CNRS 5466, LRC-CEA M03, université Bordeaux I, 351, cours de la libération, 33400 Talence, France

^b INRIA futurs, domaine de Voluceau-Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France

Reçu le 27 mai 2004 ; accepté après révision le 21 septembre 2004

Disponible sur Internet le 24 décembre 2004

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Nous nous intéressons aux inégalités discrètes d'entropie pour une classe de schémas de relaxation. Après une brève description de la méthode, nous proposons une démonstration *directe* pour établir les inégalités discrètes d'entropie. Ces inégalités sont, en fait, la conséquence d'un principe de minimisation de l'entropie satisfait par le modèle de relaxation considéré. Ces résultats sont ensuite étendus au modèle aux 10 moments. *Pour citer cet article* : C. Berthon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Entropy inequalities for a relaxation scheme. This work is devoted to the discrete entropy inequalities when considering relaxation schemes. After describing the numerical method, we propose a *direct* proof to establish the discrete entropy inequalities. In fact, we show that the considered relaxation model satisfies a minimum principle on the entropy. This principle implies the expected inequalities. The work is concluded when applying the above results to the 10 moment model. *To cite this article*: C. Berthon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We consider the numerical approximation of the weak solutions of the usual 3×3 Euler equations:

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} = {}^t(\rho, \rho u, \rho E), \quad \mathbf{f}(\mathbf{v}) = {}^t(\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u), \quad (1)$$

with $\rho E = \rho u^2/2 + \rho e$ where $e > 0$ denotes the internal energy. The state law $p := p(\rho, e) > 0$ is assumed to be associated with a convex entropy $\rho s(\rho, e)$ which satisfies the following inequality:

$$\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u \leq 0. \quad (2)$$

The map $e \rightarrow s(\rho, e)$ will be decreasing. In the present work, we will not consider the vacuum problem.

Adresse e-mail : berthon@math.u-bordeaux1.fr (C. Berthon).

To approximate the weak solutions of (1) and (2), we propose to consider a suitable extended first order system with singular perturbations. The aim of this system is to restore the initial system in the regime of an infinite relaxation parameter. Several choices can be considered [1,8,11] to define the first order system with singular perturbations, denoted *relaxation system* in the sequel. Motivated by [5,10], we consider a relaxation system such that most of the nonlinearities of the Euler equations are kept for the sake of accuracy. We propose to relevantly modify the pressure law [11]:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w}^\lambda + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{w}^\lambda) &= \lambda \mathbf{R}(\mathbf{w}^\lambda), \\ \mathbf{w}^\lambda &= {}^t(\rho^\lambda, \rho^\lambda u^\lambda, \rho^\lambda E^\lambda, \rho^\lambda \pi^\lambda), \quad \mathbf{R}(\mathbf{w}^\lambda) = {}^t(0, 0, 0, p(\rho^\lambda, e^\lambda) - \pi^\lambda), \\ \mathbf{g}(\mathbf{w}^\lambda) &= {}^t(\rho^\lambda u^\lambda, \rho^\lambda (u^\lambda)^2 + \pi^\lambda, (\rho^\lambda E^\lambda + \pi^\lambda) u^\lambda, \rho^\lambda \pi^\lambda u^\lambda + a^2 u^\lambda). \end{aligned} \quad (3)$$

For the sake of clarity in the notations, we will omit the exponent λ . The relaxation parameter $a > 0$ must satisfy the sub-characteristic Whitham condition [13]:

$$a^2 > \rho^2 \partial_\rho p(\rho, e) + p(\rho, e) \partial_e p(\rho, e). \quad (4)$$

This condition is actually needed to prevent the relaxation approximation procedure from instabilities as λ goes to infinity. Let us note from now on that the system $(11)_{\lambda=0}$ is nonlinear hyperbolic. All the fields of the system are linearly degenerated. The Jacobian matrix of the flux function \mathbf{g} admits as eigenvalues: u , $u \pm a/\rho$. As a consequence, the solution of the Riemann problem is made of constant states separated by contact discontinuities. In addition, as soon as the relaxation parameter a is assumed to be large enough, the density and the internal energy of the Riemann solution remain positive. In the sequel, this condition to ensure the positiveness of the density and the internal energy, will be systematically assumed: a is large enough to satisfy,

$$\frac{1}{\rho_L} + \frac{u_\star - u_L}{a} > 0, \quad \frac{1}{\rho_R} + \frac{u_R - u_\star}{a} > 0, \quad e_L + \frac{\pi_\star^2 - \pi_L^2}{2a^2} > 0, \quad e_R + \frac{\pi_\star^2 - \pi_R^2}{2a^2} > 0, \quad (5)$$

with $u_\star = \frac{u_L + u_R}{2} + \frac{\pi_L - \pi_R}{2a}$ and $\pi_\star = \frac{\pi_L + \pi_R}{2} + \frac{a}{2}(u_L - u_R)$, where \mathbf{w}_L and \mathbf{w}_R denote the left and right states of the initial Riemann problem.

Now, based on the relaxation system (3), we propose a relaxation scheme to approximate the solutions of (1) and (2) and we recall the aim of the method [1,3,4]. Let an approximation of the equilibrium solution at the date t^n : $\mathbf{v}^n(x) = \mathbf{v}_i^n$ if $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ be given. We propose to evolve this approximation at the next time level into two steps.

Evolution: $t^n \rightarrow t^{n+1,-}$. With $0 < t < \Delta t$, we solve the Cauchy problem $(11)_{\lambda=0}$ with the initial data given by $\mathbf{w}^n(x) = \mathbf{w}_i^n$ if $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ where the approximation at the equilibrium is ensured by $\mathbf{w}_i^n = {}^t(\rho_i^n, (\rho u)_i^n, (\rho E)_i^n, (\rho \pi)_i^n)$ with $\pi_i^n = p(\rho_i^n, e_i^n)$. As soon as the following CFL condition is satisfied:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|u|, |u \pm a/\rho|) \leq \frac{1}{2}, \quad (6)$$

the solution $\mathbf{w}^h(x, t)$ is made of the juxtaposition, with no interaction, of the Riemann problem solutions set at each interface $x_{i+1/2}$. Then, we define $\mathbf{w}_i^{n+1,-} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}^h(x, \Delta t) dx$. In this first step of the method, let us note that the parameter a can be locally evaluated on each Riemann problem. This evaluation must satisfy the Whitham condition (4) and the positiveness condition (5). As a consequence, we immediately obtain $\rho_i^{n+1,-} > 0$.

Relaxation: $t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$. A projection of the vector state $\mathbf{w}_i^{n+1,-}$ is done on the equilibrium manifold $\{\pi = p(\rho, e)\}$. Put in other words, we solve $\partial_t \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}(\mathbf{w})$ with $\mathbf{w}_i^{n+1,-}$ as the initial data and we consider the solution as λ tends to ∞ . We obtain $\mathbf{v}_i^{n+1} = {}^t(\rho, \rho u, \rho E)_i^{n+1,-}$ and $\pi_i^{n+1} = p(\rho_i^{n+1}, e_i^{n+1})$.

To conclude the presentation of the relaxation scheme, we recall that this scheme typically enters the framework of the usual conservative finite volume method:

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2}^n - \mathbf{f}_{i-1/2}^n), \quad (7)$$

where $\mathbf{f}_{i+1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)$ denotes the numerical flux function.

Now, we state the stability result.

Theorem 0.1. Assume the conditions (4), (5) and (6). The internal energy $e_i^{n+1} = e(\mathbf{v}_i^{n+1})$, evaluated by the relaxation scheme (7), stays positive. For all $i \in \mathbb{Z}$, the approximated solution satisfies the following entropy inequality:

$$\frac{\rho_i^{n+1} s_i^{n+1} - \rho_i^n s_i^n}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{f}_{\rho s})_{i+1/2}^n - (\mathbf{f}_{\rho s})_{i-1/2}^n}{\Delta x} \leq 0, \quad s_i^n = s(\rho_i^n, e_i^n), \quad (8)$$

where $(\mathbf{f}_{\rho s})_{i+1/2}^n = (\mathbf{f}_{\rho s})(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)$ is the numerical flux function associated with the entropy ρs . In addition, the following maximum principle [12] is satisfied: $s_i^{n+1} \leq \max(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n)$ for all $i \in \mathbb{Z}$.

Next, we establish the above result and we apply this scheme to the 10 moment model.

1. Introduction

Nous nous intéressons à l'approximation numérique des solutions faibles des équations d'Euler :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} = {}^t(\rho, \rho u, \rho E), \quad \mathbf{f}(\mathbf{v}) = {}^t(\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u), \quad (9)$$

avec $\rho E = \rho u^2/2 + \rho e$, où $e > 0$ désigne l'énergie interne. La loi de pression $p := p(\rho, e) > 0$ est associée à une entropie strictement convexe $\rho s(\rho, e)$ qui satisfait l'inégalité :

$$\partial_t \rho s + \partial_x \rho s u \leq 0. \quad (10)$$

Nous supposons que l'application $e \rightarrow s(\rho, e)$ est une application strictement décroissante. Dans la présente Note, le cas du vide ne sera pas considéré.

Afin d'approcher les solutions faibles de (9) et (10), nous considérons un système adéquat du premier ordre avec perturbations singulières et conduisant au système d'EDP initial dans la limite infinie d'un paramètre de relaxation. Différents choix peuvent être adoptés [1,8,11] pour le système du premier ordre avec perturbations singulières, nommé *système de relaxation*. Motivé par [5,10], nous considérons un système de relaxation qui préserve la plupart des non-linéarités du système initial et qui repose sur une modification de la loi de pression [11] :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w}^\lambda + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{w}^\lambda) &= \lambda \mathbf{R}(\mathbf{w}^\lambda), \\ \mathbf{w}^\lambda &= {}^t(\rho^\lambda, \rho^\lambda u^\lambda, \rho^\lambda E^\lambda, \rho^\lambda \pi^\lambda), \quad \mathbf{R}(\mathbf{w}^\lambda) = {}^t(0, 0, 0, p(\rho^\lambda, e^\lambda) - \pi^\lambda), \\ \mathbf{g}(\mathbf{w}^\lambda) &= {}^t(\rho^\lambda u^\lambda, \rho^\lambda (u^\lambda)^2 + \pi^\lambda, (\rho^\lambda E^\lambda + \pi^\lambda) u^\lambda, \rho^\lambda \pi^\lambda u^\lambda + a^2 u^\lambda). \end{aligned} \quad (11)$$

Sans ambiguïté et afin d'alléger les notations, nous omettrons l'exposant λ . Le paramètre a doit satisfaire la condition sous-caractéristique de Whitham [13] :

$$a^2 > \rho^2 \partial_\rho p(\rho, e) + p(\rho, e) \partial_e p(\rho, e), \quad (12)$$

afin d'éviter des instabilités dans la procédure de relaxation, lorsque λ tend vers l'infini. Notons, dès à présent, que le système $(11)_{\lambda=0}$ est hyperbolique non-linéaire avec seulement des champs linéairement dégénérés. Les valeurs propres de la jacobienne du flux \mathbf{g} sont : $u, u \pm a/\rho$. En conséquence, la solution du problème de Riemann est constituée par des états constants séparés par des discontinuités de contact. De plus, dans un problème de Riemann, en choisissant le paramètre $a > 0$ assez grand, la densité et l'énergie interne restent positives. Dans toute la suite, a sera toujours supposé vérifier cette condition (5) de positivité de la densité et de l'énergie interne.

Nous déduisons de ce système de relaxation une méthode numérique de type volume fini qui présente simultanément précision et robustesse. Concernant cette méthode, une question reste délicate : les inégalités discrètes

d'entropie. Une première démonstration est proposée dans [3] pour les gaz parfaits. Pour les gaz réels, une démonstration est établie dans [4]. Cette démonstration repose sur un autre modèle de relaxation pour lequel l'énergie totale joue le rôle d'une entropie et va donc décroître. En imposant la conservation de l'énergie totale, les auteurs établissent les inégalités d'entropie recherchées et montre que le schéma numérique qu'ils obtiennent coïncide avec le schéma numérique utilisant (11). Nous proposons une nouvelle démonstration qui utilise une approche *directe* pour laquelle nous établissons un principe de minimisation de l'entropie pour le modèle de relaxation (11).

2. Méthode de relaxation

Pour approcher les solutions faibles de (9), (10), nous considérons le système hors équilibre (11). Nous rappelons brièvement le principe de la méthode [1,3,4]. Considérons connue à la date t^n une approximation de la solution de (9), (10) : $\mathbf{v}^n(x) = \mathbf{v}_i^n$ si $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$. On propose de faire évoluer en temps cette approximation par une méthode à deux pas.

Evolution : $t^n \rightarrow t^{n+1,-}$. Pour $0 < t < \Delta t$, nous résolvons le problème de Cauchy (11) $_{\lambda=0}$ avec pour donnée initiale $\mathbf{w}^n(x) = \mathbf{w}_i^n$ si $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ où l'approximation à l'équilibre est donnée par $\mathbf{w}_i^n = {}^t(\rho_i^n, (\rho u)_i^n, (\rho E)_i^n, (\rho \pi)_i^n)$ avec $\pi_i^n = p(\rho_i^n, e_i^n)$. Sous la condition CFL :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|u|, |u \pm a/\rho|) \leq \frac{1}{2}, \quad (13)$$

la solution $\mathbf{w}^h(x, t)$ est constituée de la juxtaposition sans interaction de la solution des problèmes de Riemann posés à chaque interface $x_{i+1/2}$. On définit alors $\mathbf{w}_i^{n+1,-} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{w}^h(x, \Delta t) dx$. Notons que dans ce premier pas de la méthode, le paramètre a peut être choisi localement pour chaque problème de Riemann, de manière à vérifier la condition de Whitham (12) ainsi que la condition de positivité (5). Ceci implique immédiatement $\rho_i^{n+1,-} > 0$.

Relaxation : $t^{n+1,-} \rightarrow t^{n+1}$. Le vecteur $\mathbf{w}_i^{n+1,-}$ est projeté sur la variété d'équilibre $\{\pi = p(\rho, e)\}$. Ceci revient à résoudre $\partial_t \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}(\mathbf{w})$ avec $\mathbf{w}_i^{n+1,-}$ pour donnée initiale et considérer la solution pour λ qui tend vers ∞ . On en déduit $\mathbf{v}_i^{n+1} = {}^t(\rho, \rho u, \rho E)_i^{n+1,-}$ et $\pi_i^{n+1} = p(\rho_i^{n+1}, e_i^{n+1})$.

Pour conclure la présentation de la méthode, nous soulignons que ce schéma s'inscrit dans le cadre usuel des schémas de type volume fini conservatif à trois points. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+1} &= \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2}^n - \mathbf{f}_{i-1/2}^n), \\ \mathbf{f}_{i+1/2}^n &= \mathbf{g}|_{(\rho, \rho u, \rho E)}(\mathbf{w}^h(x_{i+1/2}, \Delta t)), \end{aligned} \quad (14)$$

où $\mathbf{g}|_{(\rho, \rho u, \rho E)}$ désigne la restriction de \mathbf{g} à ses trois premières composantes. De plus, par définition de \mathbf{w}^h , $\mathbf{w}^h(x_{i+1/2}, \Delta t)$ ne dépend que de \mathbf{w}_i^n et \mathbf{w}_{i+1}^n . Enfin, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, \mathbf{w}_i^n définit un état à l'équilibre qui ne dépend que de \mathbf{v}_i^n . Il en résulte que le flux numérique peut se réécrire sous la forme $\mathbf{f}_{i+1/2}^n = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)$. Concernant la précision de la méthode, il est aisé de montrer que le schéma de relaxation (14) préserve les discontinuités de contact stationnaires [6].

3. Inégalités d'entropie

Nous énonçons à présent le résultat de stabilité.

Théorème 3.1. *Sous les conditions de Whitham (12), CFL (13) et de positivité (5), le schéma de relaxation (14) vérifie la positivité de l'énergie interne $e_i^{n+1} = e(\mathbf{v}_i^{n+1})$ ainsi que l'inégalité d'entropie suivante pour tout $i \in \mathbb{Z}$:*

$$\frac{\rho_i^{n+1} s_i^{n+1} - \rho_i^n s_i^n}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{f}_{\rho s})_{i+1/2}^n - (\mathbf{f}_{\rho s})_{i-1/2}^n}{\Delta x} \leq 0, \quad s_i^n = s(\rho_i^n, e_i^n), \quad (15)$$

où $(\mathbf{f}_{\rho s})_{i+1/2}^n = (\mathbf{f}_{\rho s})(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)$ désigne le flux numérique associé à l'entropie ρs . De plus, le principe du maximum [12] suivant est satisfait : $s_i^{n+1} \leq \max(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

La démonstration de la positivité de l'énergie interne est une conséquence directe de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction concave $\mathbf{w} \rightarrow e(\mathbf{w}) = \rho E - (\rho u)^2 / (2\rho)$. En effet, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $e_i^{n+1} = e_i^{n+1,-} = e(\mathbf{w}_i^{n+1,-}) \geq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho E - (\rho u)^2 / (2\rho)\}^h(x, t^{n+1,-}) dx$, ce qui implique, sous la condition (5), la positivité de e_i^{n+1} . La preuve des inégalités d'entropie repose sur le résultat suivant :

Lemme 3.2. Posons $I = \pi + a^2/\rho$ et $X = a^2e - \pi^2/2$. Les solutions du problème de Riemann pour $(11)_{\lambda=0}$ vérifient sans condition $\partial_t \rho I + \partial_x \rho I u = 0$ et $\partial_t \rho X + \partial_x \rho X u = 0$. De plus, sous la condition (12), il existe une fonction $\bar{\rho}(X, I)$ et une fonction $\bar{e}(X, I)$ telles que $\bar{\rho}(X, I)|_{\{\pi=p(\rho,e)\}} = \rho$ et $\bar{e}(X, I)|_{\{\pi=p(\rho,e)\}} = e$. Enfin, la fonction $\mathbf{w} \rightarrow s(\bar{\rho}(X, I), \bar{e}(X, I))$ vérifie $\partial_t \rho s(\bar{\rho}, \bar{e}) + \rho s(\bar{\rho}, \bar{e}) u = 0$ et satisfait le principe du minimum suivant : $\min_{\pi \in \mathbb{R}} s(\bar{\rho}, \bar{e}) = s(\rho, e)$.

Utilisant ce résultat, nous établissons (15). Au cours de l'étape d'évolution en temps, la solution \mathbf{w}^h vérifie sous la condition (13) : $\partial_t \rho^h s(\bar{\rho}^h, \bar{e}^h) + \partial_x \rho^h s(\bar{\rho}^h, \bar{e}^h) u^h = 0$ avec $\bar{\rho}^h = \bar{\rho}(X^h, I^h)$ et $\bar{e}^h = \bar{e}(X^h, I^h)$ où $I^h = \pi^h + a^2/\rho^h$ et $X^h = a^2 e^h - (\pi^h)^2/2$. En intégrant cette relation sur $(t^n, t^{n+1,-}) \times (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho^h s(\bar{\rho}^h, \bar{e}^h)\}(x, t^{n+1,-}) dx - \rho_i^n s_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\mathbf{f}_{\rho s})_{i+1/2}^n - (\mathbf{f}_{\rho s})_{i-1/2}^n) = 0.$$

En appliquant successivement le principe de minimisation sur $s(\bar{\rho}, \bar{e})$ puis l'inégalité de Jensen, nous avons :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho^h s(\bar{\rho}^h, \bar{e}^h)\}(x, t^{n+1,-}) dx \geq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho^h s(\rho^h, e^h)\}(x, t^{n+1,-}) dx \geq \rho_i^{n+1} s_i^{n+1}.$$

L'inégalité (15) est alors établie. Concernant le principe du maximum, il suffit de remarquer que sur $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, $s(\bar{\rho}^h, \bar{e}^h)$ prend au plus deux valeurs : s_i^n et s_{i+1}^n . On en déduit $\rho_i^{n+1} s_i^{n+1} \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \{\rho^h s(\bar{\rho}^h, \bar{e}^h)\}(x, t^{n+1,-}) dx \leq \rho_i^{n+1} \max(s_{i-1}^n, s_i^n, s_{i+1}^n)$, ce qui achève la démonstration.

4. Modèle aux 10 moments

Nous étendons les résultats précédents à une formulation tensorielle anisotrope des équations d'Euler [3,7,9] : le modèle aux 10 moments. Ce modèle est gouverné par le système d'EDP suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= 0, & \mathbf{v} &= {}^t(\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho E_{11}, \rho E_{12}, \rho E_{22}), \\ \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= {}^t(\rho u_1, \rho u_1^2 + p_{11}, \rho u_1 u_2 + p_{12}, (\rho E_{11} + p_{11})u_1, (\rho E_{12} + p_{12})u_1 + p_{11}u_2, \rho E_{22}u_1 + p_{12}u_2), \end{aligned}$$

avec $p_{11} = 2(\rho E_{11} - \rho u_1^2/2) > 0$ et $p_{12} = \rho E_{12} - \rho u_1 u_2$. Le système est hyperbolique et il admet pour valeurs propres : $u_1, u_1 \pm \sqrt{3p_{11}/\rho}$ et $u_1 \pm \sqrt{p_{11}/\rho}$. Les solutions faibles satisfont les inégalités d'entropie suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \mathcal{F}(s) + \partial_x \rho \mathcal{F}(s) u_1 &\leq 0, & s(\mathbf{v}) &= p_{11}/\rho^3, \\ \partial_t \rho \mathcal{G}(\sigma) + \partial_x \rho \mathcal{G}(\sigma) u_1 &\leq 0, & \sigma(\mathbf{v}) &= (p_{11} p_{22} - p_{12}^2)/\rho^4, \end{aligned}$$

où nous avons introduit $p_{22} = 2(\rho E_{22} - \rho u_2^2/2)$. Les fonctions régulières \mathcal{F} et \mathcal{G} sont telles que les applications $\mathbf{v} \rightarrow \mathcal{F}(s(\mathbf{v}))$ et $\mathbf{v} \rightarrow \mathcal{G}(\sigma(\mathbf{v}))$ sont convexes. Afin d'approcher les solutions faibles de ce modèle, nous considérons le schéma de relaxation précédemment développé. Nous proposons un système de relaxation similaire à (11) et qui repose sur une modification des pressions p_{11} et p_{12} :

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{w}) &= \lambda \mathbf{R}(\mathbf{w}), & \mathbf{w} &= {}^t(\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho E_{11}, \rho E_{12}, \rho E_{22}, \rho \pi_{11}, \rho \pi_{12}), \\
\mathbf{g}(\mathbf{w}) &= {}^t(\rho u_1, \rho u_1^2 + \pi_{11}, \rho u_1 u_2 + \pi_{12}, (\rho E_{11} + \pi_{11})u_1, (\rho E_{12} + \pi_{12})u_1 + \pi_{11}u_2, \\
&\quad \rho E_{22}u_1 + \pi_{12}u_2, \rho \pi_{11}u_1 + a^2 u_1, \rho \pi_{12}u_1 + a^2 u_2), \\
\mathbf{R}(\mathbf{w}) &= {}^t(0, 0, 0, 0, 0, 0, p_{11} - \pi_{11}, p_{12} - \pi_{12}).
\end{aligned} \tag{16}$$

Le paramètre $a > 0$ doit satisfaire la condition de Whitham : $a^2 > 3\rho p_{11}$.

Ce modèle de relaxation admet les mêmes propriétés que le système (11). Les valeurs propres sont $u_1, u_1 \pm a/\rho$. Tous les champs sont linéairement dégénérés. Enfin, si a satisfait la condition (5) en remplaçant u par u_1 , π par π_{11} et e par $E_{11} - u_1^2/2$, la solution du problème de Riemann de (16) $_{\lambda=0}$ satisfait la positivité de la densité et de la pression p_{11} .

Sur la base du modèle (16), nous développons un schéma de relaxation en tout point similaire à celui décrit dans le cadre des équations d'Euler. Ce schéma de relaxation vérifie les propriétés suivantes [2] :

Théorème 4.1. *Sous les conditions de CFL $\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|u_1|, |u_1 \pm a/\rho|) \leq 1/2$, de Whitham $a^2 > 3\rho p_{11}$ et de positivité (5), le schéma de relaxation vérifie la positivité de ρ_i^{n+1} et $(p_{11})_i^{n+1}$ ainsi que les inégalités d'entropie suivantes pour tout $i \in \mathbb{Z}$:*

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_i^{n+1} \mathcal{F}(s_i^{n+1}) - \rho_i^n \mathcal{F}(s_i^n)}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{f}_{\rho \mathcal{F}(s)})_{i+1/2}^n - (\mathbf{f}_{\rho \mathcal{F}(s)})_{i-1/2}^n}{\Delta x} &\leq 0, & s_i^n &= s(\mathbf{v}_i^n), \\
\frac{\rho_i^{n+1} \mathcal{G}(\sigma_i^{n+1}) - \rho_i^n \mathcal{G}(\sigma_i^n)}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{f}_{\rho \mathcal{G}(\sigma)})_{i+1/2}^n - (\mathbf{f}_{\rho \mathcal{G}(\sigma)})_{i-1/2}^n}{\Delta x} &\leq 0, & \sigma_i^n &= \sigma(\mathbf{v}_i^n),
\end{aligned}$$

où $(\mathbf{f}_{\rho \mathcal{F}(s)})_{i+1/2}^n = (\mathbf{f}_{\rho \mathcal{F}(s)})(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)$, respectivement $(\mathbf{f}_{\rho \mathcal{G}(\sigma)})_{i+1/2}^n = (\mathbf{f}_{\rho \mathcal{G}(\sigma)})(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)$, désigne le flux numérique associé à l'entropie $\rho \mathcal{F}(s)$, respectivement $\rho \mathcal{G}(\sigma)$.

Références

- [1] M. Baudin, C. Berthon, F. Coquel, R. Masson, Q.H. Tran, Relaxation method for a two-phase flow model with hydrodynamic closure law, Numer. Math. (2004), accepté.
- [2] C. Berthon, Numerical approximation of the 10 moment Gaussian closure, soumis.
- [3] F. Bouchut, Entropy satisfying flux vector splittings and kinetic BGK models, Numer. Math. 94 (2003) 623–672.
- [4] C. Chalons, F. Coquel, Navier–Stokes equations with several independent pressure laws and explicit predictor–corrector scheme, 2003, preprint.
- [5] G.Q. Chen, C.D. Levermore, T.P. Liu, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy, Commun. Pure Appl. Math. 47 (1995) 787–830.
- [6] F. Coquel, B. Perthame, Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics, SIAM J. Numer. Anal. 35 (6) (1998) 2223–2249.
- [7] B. Dubroca, M. Tchong, P. Charrier, V.T. Tikhonchuk, J.-P. Morreeuw, Magnetic field generation in plasma due to anisotropic laser heating, Phys. Plasma 11 (2004) 3830–3839.
- [8] S. Jin, Z. Xin, The relaxation scheme for systems of conservation laws in arbitrary space dimension, Commun. Pure Appl. Math. 45 (1995) 235–276.
- [9] C.D. Levermore, W.J. Morokoff, The Gaussian moment closure for gas dynamics, SIAM J. Appl. Math. 59 (1999) 72–96.
- [10] T.P. Liu, Hyperbolic conservation laws with relaxation, Commun. Math. Phys. 108 (1987) 153–175.
- [11] I. Suliciu, On the thermodynamics of fluids with relaxation and phase transitions, I – Fluids with relaxation, Int. J. Engrg. Sci. 36 (1998) 921–947.
- [12] E. Tadmor, A minimum entropy principle in the gas dynamics equations, Appl. Numer. Math. 2 (1986) 211–219.
- [13] J. Whitham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, 1974.