Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 695–698
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Sur un théorème de Cauchy–Kowalewski–Nagumo global dans des espaces de Gevrey projectifs

Daniel Gourdin [a], Todor Gramchev [b]

[a] *UFR 920, université de Paris 6, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*
[b] *Dipartimento Matematica, Università di Cagliari, via Ospedale, 72, 09124 Calgliari, Italie*

Reçu le 13 janvier 2004 ; accepté après révision le 21 septembre 2004

Présenté par Yvonne Choquet-Bruhat

Résumé

Nous proposons une nouvelle approche, basée à la fois sur le principe de contraction et celui des approximations successives de Picard, pour l'étude d'un problème de Cauchy global associé à l'opérateur aux dérivées partielles $D_t^m - \sum_{(j,\alpha)\in B} a_{j\alpha} D_t^j D_x^\alpha$ à coefficients $a_{j\alpha}$ continus ou holomorphes en t dans les espaces de Gevrey projectifs. Nous généralisons aussi les résultats d'une Note précédente au cas d'opérateurs non Kowalewskiens. ***Pour citer cet article : D. Gourdin, T. Gramchev, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

On a global Cauchy–Kowalewski–Nagumo theorem in projective Gevrey space. We propose a new approach, based on a combination of the contraction principle and Picard successive approximations, for the study of a global Cauchy problem associated to partial differential operator $D_t^m - \sum_{(j,\alpha)\in B} a_{j\alpha} D_t^j D_x^\alpha$ with coefficients $a_{j\alpha}$ continuous or holomorphic with respect to t in projective Gevrey spaces. We extend the result of a previous Note to the case of non Kowalewskian operators. ***To cite this article: D. Gourdin, T. Gramchev, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction et résultats

Nous étudions le problème de Cauchy suivant (cf. [1,2,5])

$$D_t^m u = \sum_{(j,\alpha)\in B} a_{j\alpha} D_t^j D_x^\alpha u + f \quad \text{dans } \mathbb{C}\times\Omega \text{ ou } \mathbb{R}\times\Omega, \tag{1}$$

$$D_t^j u(0,\cdot) = u_j^0(\cdot) \quad \text{dans } \Omega,\ j = 0,\dots,m-1, \tag{2}$$

Adresse e-mail : gourdin@math.jussieu.fr (D. Gourdin).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.09.034

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, B une partie finie de $\{1, \dots, m-1\} \times \mathbb{Z}_+^n$. Dans ces conditions, il existe $\sigma > 0$ tel que

$$j + \sigma|\alpha| \leqslant m, \quad \forall (j, \alpha) \in B. \tag{3}$$

On définit

$$\delta = \sup\bigl\{\sigma > 0;\ \text{vérifie (3)}\bigr\} \tag{4}$$

et on suppose

$$a_{j,\alpha} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \tag{5}$$

où

$$a_{j,\alpha} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad \text{pout tout } \forall (j, \alpha) \in B. \tag{6}$$

Dans [1,2] Gourdin et Mechab ont supposé que B ne contenait aucun couple du type $(j, 0)$ et que $a_{j,\alpha}$ pouvait être en plus polynomial en x. Ici nous généralisons dans deux directions différentes les résultats précédents en proposant aussi une nouvelle méthode de démonstration.

D'une part nous acceptons la présence de couples du type $(j, 0)$ dans B et d'autre part nous admettons aussi que l'opérateur puisse ne pas être Kowalewskien.

Par la suite nous envisageons de traiter le cas où $a_{j,\alpha}$ est à la fois fonction de t et polynomial en x, et d'expliciter notre hypothèse à l'aide de la géomètrie des polynômes de Newton. Nous obtenons le résultat suivant (cf. notations de [2]).

Théorème 1.1. *Si les données de Cauchy se trouvent dans l'espace projectif de Gevrey* [5,3,6,4] $G^{(\sigma)}(\Omega)$ *et si* $f \in G^{(0,\sigma)}(\mathbb{R} \times \Omega)$ (*resp.* $G^{(\omega,\sigma)}(\mathbb{C} \times \Omega)$)*, alors le problème de Cauchy,* (1) *et* (2)*, admet une solution unique dans le même espace que celui de* f*, pourvu que* $0 < \sigma \leqslant \delta$.

2. Résumé de la démonstration

La démonstration se fait en plusieurs étapes reposant sur les lemmes suivants :

(a) Soit M la fonction positive, non décroissante, semi-continue inférieurement définie sur $[0, +\infty[$ par

$$M(\theta) = \max_{(j,\alpha)\in B} \Bigl(\sup_{|z|\leqslant\theta} \bigl|a_{j,\alpha}(z)\bigr| \Bigr), \quad \forall \theta > 0. \tag{7}$$

Lemme 2.1. *Il existe deux fonctions* φ, ψ *continues, positives, non décroissantes, définies sur* $[2, +\infty[$ *telle que*

$$\varphi(h)\psi(h) \leqslant \frac{h}{2}, \quad h \geqslant 2 \tag{8}$$

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{M(\varphi(h))h^{m-k-\rho_0}}{\psi(h)^{m-k}} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{9}$$

où $\rho_0 > 0$.

Nous définissons les semi normes suivantes dans l'espace de Gevrey inductif $G^{m-1,\sigma}(\mathbb{R} \times \Omega)$ (resp. $G^{m-1,\sigma}(\mathbb{C} \times \Omega)$)

$$\bigl\|u(t)\bigr\|_{h,\sigma,k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h - |t|\psi(h))^{k+\sigma|\alpha|}}{(k + \sigma|\alpha|)!} \sup_{x\in K} \bigl|D_t^k D_x^\alpha u(t, x)\bigr|, \tag{10}$$

$$\bigl\|u(t)\bigr\|_{h,\sigma,t,K} = \sup_{0\leqslant|s|\leqslant|t|} \bigl\|u(s)\bigr\|_{h,\sigma,K} \tag{11}$$

pour tout $0 \leqslant |t| \leqslant \varphi(h)$, $K \subset\subset \Omega$, et toute fonction $u \in \mathcal{C}^{m-1}([0, T[, G^\sigma(\Omega))$ avec $T = \varphi(h)$.

(b) Nous intégrons m fois par rapport à t les Éqs. (1). Nous obtenons alors en utilisant (2) l'équation intégrale

$$u(t,x)=\sum_{(j,\beta)\in B} R^{j,\beta}u(t,x)+F(t,x) \tag{12}$$

avec

$$R^{j,\beta}u(t,x)=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}a_{j,\beta}(\tau)D_\tau^j D_x^\beta u(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau, \tag{13}$$

$$F(t,x)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{t^j}{j!}u_j^p(x)+\int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}f(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

Posons

$$Ru(t,x)=\sum_{(j!\beta)\in B} R^{j,\beta}u(t,x). \tag{15}$$

Construisons la suite de fonctions suivantes :

$$\begin{cases} u_{N+1}(t,x)=Ru_N(t,x)+F(t,x), & N=0,1,\dots,\\ u_0(t,x)=F(t,x) \end{cases}$$

alors $u_N\in\mathcal{C}(\mathbb{R},G^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n))$ resp. $\mathcal{O}(\mathbb{C},G^{(\sigma)}(\mathbb{R}^n))$, $\forall N\in\mathbb{Z}^+$. Pour évaluer

$$D_t^k D_x^\alpha R^{j,\beta}u=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-k-1}}{(m-k-1)!}a_{j\beta}(\tau)D_\tau^j D_x^{\alpha+\beta}u(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

on considère les notations

$$\{u\}_{h,\sigma}^{k,\alpha}=\frac{(h-|t|\psi(h))^{\sigma|\alpha|+k}}{(\sigma|\alpha|+k)!}D_t^k D_x^\alpha u(t,x), \tag{17}$$

$$\big\|\{u\}_{h,\sigma}^{k,\alpha}\big\|_K(t)=\sup_{x\in K}\big|\{u\}_{h,\sigma}^{k,\alpha}(t,x)\big|, \tag{18}$$

$$\big\|\{u\}_{h,\sigma}^{k,\alpha}\big\|_{K,t}=\sup_{|\tau|\leqslant|t|}\big\|\{u\}_{h,\sigma}^{k,\alpha}(\tau)\big\|_K. \tag{19}$$

Alors

$$\begin{aligned}\big\|\{R^{j\beta}u\}_{h,\sigma}^{k,\alpha}\big\|_K &\leqslant M\big(\varphi(h)\big)\frac{(\sigma(|\alpha|+|\beta|)+j)!}{(\sigma|\alpha|+k)!}\big(h-|t|\psi(h)\big)^{\sigma|\alpha|+k}\\ &\quad\times\int_0^{|t|}\frac{(|t|-\tau)^{m-k-1}}{(m-k-1)!(h-\tau\psi(h))^{\sigma(|\alpha|+|\beta|)+j}}\big\|\{u\}_{h,\sigma}^{j,\alpha+\beta}\big\|_{K,\tau}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{20}$$

Lemme 2.2. *Il existe $C_\sigma=C_{\sigma,m}>0$ tel que*

$$\frac{(\sigma\cdot\mu+r+z)!}{(\sigma\mu+r)!}\leqslant C_\sigma(1+\mu)^z,\quad \mu\geqslant 0,0\leqslant r,\ z\leqslant m. \tag{21}$$

À l'aide du Lemme 2.2 et en posant

$$A_\sigma=C_\sigma\sup\frac{(1+|\alpha|)^{\sigma|\beta|+j-k}}{(\sigma(|\alpha|+|\beta|)+j-1)\cdots(\sigma(|\alpha|+|\beta|)+j-m+k)} \tag{22}$$

lorsque

$$\begin{cases} \sigma\big(|\alpha|+|\beta|\big)+j-m+k>0, \\ \sigma|\beta|+j-k\geqslant 0 \end{cases}$$

nous obtenons

Lemme 2.3. *$\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^m$, $\forall k\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma|\beta|+j>k$ et $m-k<\sigma(|\alpha|+|\beta|)+j$*

$$\big\|\{R^{j\beta}u\}_{h,\sigma}^{k,\alpha}\big\|_{K,t}\leqslant 2^m A_\sigma\frac{M(\varphi(h))h^{m-\rho_0}}{(\psi(h))^{m-k}}\big\|\{u\}_{h,\sigma}^{j,\alpha+\beta}\big\|_{K,t} \tag{23}$$

pour $0\leqslant|t|\leqslant\varphi(h)$ et

$$\rho_0=\min\big\{\sigma|\beta|+j-k;\ (j,\beta)\in B,\ 0\leqslant k\leqslant m-1,\ \sigma|\beta|+j-k>0\big\}. \tag{24}$$

Lorsque $\sigma|\beta|+j-k\leqslant 0$ nous avons le

Lemme 2.4. *Pour $\alpha\in\mathbb{Z}_+^m$, $(j,\beta)\in B$, $k\in\mathbb{Z}^+$, $\sigma|\beta|+j\leqslant k$ nous avons*

$$\big\|\{R^{j\beta}u\}_{h,\sigma}^{k,\alpha}\big\|_{K,t}\leqslant M\big(\varphi(h)\big)h^m\int_0^t\big\|\{u\}_{h,\sigma}^{j,\alpha+\beta}\big\|_{K,\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{25}$$

On en déduit

$$\|Ru\|_{h,\sigma,|t|,K}\leqslant Q_B M\big(\varphi(h)\big)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{h^{m-k-\rho_0}}{(\psi(h))^{m-k}}\|u\|_{h,\sigma,t,K}+N(h)\int_0^{|t|}\|u\|_{h,\sigma,\tau,K}\,\mathrm{d}\tau \tag{26}$$

pour $0\leqslant|t|\leqslant\varphi(h)$, $N(h)=Q_B M(h)h^m$, $Q_B=\operatorname{Card}B$.

(d) *Convergence de la suite$(u^N)_N$.*

Nous posons $w_N=u_N-u_{N+1}$, $w_{-1}=0$ $(\mathbb{N}\in\mathbb{Z}^+)$, alors $w_{N+1}=Rw_N$, $|t|\leqslant\varphi(h)$, $N=0,1,\ldots.$ Posons $W_N^{h,\sigma,K}(s)=\|w_N\|_{h,\sigma,s,K}$, $N\in\mathbb{Z}^+$, $0\leqslant s\leqslant\varphi(h)$, alors il existe $h_\epsilon>0$ tel que $h>h_\epsilon$ implique

$$W_{N+1}^{h,\sigma,K}(s)\leqslant\epsilon W_N^{h,\sigma,K(s)}+N(h)\int_0^s W_N^{h,\sigma,K}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{27}$$

et nous concluons à la convergence dans les espaces considérés précédemment.

Remarque. Nous envisageons le prolongement de notre résultat lorsque les coefficients $a_{j,\beta}$ sont à la fois fonctions de t et polynomiaux en x sous des hypothèses convenables.

Références

[1] D. Gourdin, M. Mechab, Sur un théorème de Cauchy–Kowalewski–Nagumo global, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 563–567.
[2] D. Gourdin, M. Mechab, Solutions globales d'un problème de Cauchy linèaire, J. Funct. Anal. 202 (1) (2003) 123–146.
[3] K. Kajitani, The hyperbolic Cauchy problem, in: Lecture Notes in Math., vol. 1505, 1991, pp. 1–70.
[4] P. Laubin, On the projective description of the space of holomorphic germs, in: Ancona-Vaillant (Ed.), Hyperbolic Differential Operators and Related Problems, in: Lecture Notes in Pure Appl. Math., vol. 233, Dekker, 2003, pp. 331–338.
[5] S. Nagumo, Über das Anfawgswert Problem partieller differential Gleichungen, Japan J. Math. 18 (1941) 41–47.
[6] Cl. Wagschal, Le problème de Goursat non linéaire, J. Math. Pure Appl. 75 (1996) 409–418.