Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 751–756
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Produits dans la cohomologie des variétés de Shimura : quelques calculs

Nicolas Bergeron

Unité mixte de recherche 8628 du CNRS, laboratoire de mathématiques, bâtiment 425, université Paris-sud, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 30 avril 2004 ; accepté après révision le 23 septembre 2004

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous montrons comment les résultats d'une prépublication récente (arXiv:math.NT/0403407 v1 24 Mar 2004) peuvent être couplés à un critère de Venkataramana pour expliciter des conditions de non nullité virtuelle du produit de deux classes de cohomologie de certaines variétés de Shimura. ***Pour citer cet article : N. Bergeron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Products in the cohomology of Shimura varieties: some calculations. We show how our recent results (arXiv: math.NT/0403407 v1 24 Mar 2004) together with a criterion of Venkataramana can be used to get explicit conditions for the virtual non-vanishing of the product of two cohomology classes of certain Shimura varieties. ***To cite this article: N. Bergeron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

Let $S = \Gamma\backslash X$ be a *Shimura variety* obtained as the quotient of an Hermitian symmetric space $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ – G, a $\mathbb{Q}$-semisimple group, and $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ a maximal compact subgroup – by an arithmetic subgroup $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$. In [7], Venkataramana proved a criterion for two cohomology classes ω and $\eta \in H^*(S)$ to have a *virtually* non-zero cup-product, by which we mean there exists a finite Galois covering $p : S' \to S$ and two Hecke correspondances C and C' on S such that the cup-product $(C * p^*\omega \wedge C' * p^*\eta) \neq 0$. Venkataramana's criterion is a linear algebraic condition on the involved cohomology classes. The aim of this Note is to make this condition explicit in the case of the classical Hermitian symmetric domain associated to $\mathrm{SU}(p, q)$.

Adresse e-mail : Nicolas.Bergeron@math.u-psud.fr (N. Bergeron).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.09.033

Following Vogan and Zuckerman [8], we are reduced to considering strongly primitive cohomology classes in $H^*(S)$. We first show that these can be parametrized by pairs of *compatible* Young diagrams (see [5]) (λ, μ) that is Young diagrams such that

(i) $\lambda \subset \mu$, and
(ii) the skew diagram μ/λ is a reunion of rectangular diagrams.

We denote by $H^{\lambda,\mu}(S)$ the strongly primitive part of the cohomology $H^*(S)$ associated to the pair (λ, μ) of Young diagrams. Classes in $H^{\lambda,\mu}(S)$ are of degree $|\lambda| + |\hat{\mu}| = pq - (|\mu| - |\lambda|)$.

Zelevinski defined a *picture* between two skew diagrams to be a bijection between their boxes such that if a box A is weakly above and weakly left of a box B in either diagram, the corresponding boxes A' and B' of the other diagram are in order in the reverse row numbering (see [5]). He then proved that the number of pictures between a Young diagram ν and a skew diagram μ/λ is equal to the Littlewood–Richardson number $c^{\mu}_{\lambda\nu}$.

We say a Young diagram $\nu \subset p \times q$ *embeds* in a skew diagram μ/λ if there is a picture between ν and a sub-skew-diagram of μ/λ. The main result of this Note is then:

Theorem 0.1. *Let (λ, μ) and (α, β) be two pairs of compatible Young diagrams. Assume there exists a Young diagram $\nu \subset p \times q$ such that*

(i) *ν embeds in μ/λ, and*
(ii) *$\hat{\nu}$ embeds in β/α.*

The cup-product of two non-zero cohomology classes in $H^{\lambda,\mu}(S)$ and $H^{\alpha,\beta}(S)$, respectively, is then virtually non-zero in $H^*(S)$.

A (weak) corollary of this is the following:

Corollary 0.2. *Let $\omega \in H^k(S)$ and $\eta \in H^l(S)$ be two non-zero classes such that $k + l \leqslant p + q - 1$, then the cup-product of ω and η is* ***virtually*** *non-zero.*

Note that condition $k + l \leqslant p + q - 1$ in Corollary 0.2 is necessary as one can find two non-zero holomorphic cohomology classes of degree p and q respectively such that there cup-product is always (virtually) trivial.

1. Introduction

Soit $S = \Gamma\backslash X$ une *variété de Shimura* obtenue comme quotient d'un espace hermitien symétrique $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ – G étant un groupe semi-simple sur $\mathbb{Q}$, $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact maximal – par un sous-groupe arithmétique Γ de $G(\mathbb{Q})$. Il est en général difficile de décrire la cohomologie de la variété S. Dans cette Note nous nous intéressons au cup-produit dans l'algèbre $H^*(S)$. Étant donné deux classes α et β dans $H^*(S)$ peut-on s'assurer que leur cup-produit est non nul ?

Cette question est trop naïve. On s'aperçoit rapidement que pour qu'il y ait un espoir d'y répondre positivement il faut affaiblir la conclusion. Les résultats de non-annulation que nous avons en vue ne sont que des résultats *virtuels* au sens suivant : données deux classes ω, η de cohomologie holomorphe sur la variété S, on ne peut affirmer que $\omega \wedge \eta \neq 0$, mais seulement que $(C * p^*\omega \wedge C' * p^*\eta) \neq 0$. Ici $p : S' \to S$ est un revêtement galoisien de S, et C, C' sont des correspondances de Hecke sur S'.

En supposant S compacte, Venkataramana a récemment démontré (dans [7]) un joli critère pour que le cup-produit dans $H^*(S)$ de deux classes de cohomologies soit virtuellement non nul. Ce critère est une condition d'algèbre linéaire sur les classes considérées. Pour expliciter ces conditions, il faut avoir recours à la théorie des représentations des groupes réductifs réels, et à la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie ; il faut de plus utiliser la description des modules à $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie non triviale, due à Vogan et Zuckerman [8].

Notons que lorsque les classes de cohomologie considérées sont *holomorphes* la condition de Venkataramana est en fait nécessaire ; on retrouve alors un résultat de Clozel, cf. [3].

Le but de cette Note est de montrer comment expliciter complètement, pour les domaines hermitiens classiques, le critère de Venkataramana. Il s'agit donc d'un exercice d'algèbre linéaire. Celui-ci est essentiellement résolu dans la prépublication [2], cette Note est une façon d'annoncer une partie des résultats contenus dans cette prépublication en les appliquant ici aux produits dans la cohomologie des variétés de Shimura.

Lorsque X est un domaine hermitien classique G^{nc} – le groupe semi-simple (sans facteur compact) associé à l'espace symétrique X – est localement isomorphe à $\mathrm{SU}(p,q)$, $\mathrm{SO}(p,2)$, Sp_n ou $\mathrm{SO}^*(2n)$. Le cas $\mathrm{SO}(p,2)$ est déjà traité par Venkataramana (l'algèbre linéaire est facile dans ce cas). Le cas le plus intéressant est celui où G^{nc} est localement isomorphe au groupe $\mathrm{SU}(p,q)$, nous nous concentrerons donc sur ce cas. Une conséquence (faible) de notre résultat principal (Théorème 3.1) est le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Supposons G^{nc} localement isomorphe à $\mathrm{SU}(p,q)$ avec $1 \leqslant p \leqslant q$. Soient $\omega \in H^k(S)$ et $\eta \in H^l(S)$ deux classes non triviales avec $k + l \leqslant p + q - 1$, alors le cup-produit de ω et de η est* ***virtuellement*** *non nul.*

Lorsque $p = 1$ ce théorème est du à Venkataramana [7]. Il n'est pas difficile de traiter de la même manière les autres domaines hermitiens symétriques. Le critère de Venkataramana ne s'applique alors qu'à des classes de cohomologie holomorphes et ne permet « que » de retrouver des résultats de Parthasarathy [6] et Clozel [4].

Remarquons que la condition $k + l \leqslant p + q - 1$ dans le Théorème 1.1 est nécessaire, nous le vérifierons en considérant des classes de cohomologie holomorphes.

2. Algèbre linéaire

Nous supposerons dorénavant G^{nc} localement isomorphe à $\mathrm{U}(p,q)$[1], où p et q sont des entiers strictement positifs avec $p \leqslant q$. On adopte les notations classiques pour les algèbres de Lie, leurs complexifiées, décomposition de Cartan … que l'on trouve par exemple dans [8] (voir aussi [2]). Du point de vue matriciel, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}(p,q)$ est l'algèbre de Lie du groupe unitaire associé à la forme de matrice

$$\begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{pmatrix}.$$

On a $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{u}(p) \times \mathfrak{u}(q)$ (matrices unitaires par blocs),

$$\mathfrak{p}^+ = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong M_{p\times q}(\mathbb{C}).$$

On prend pour $i\mathfrak{t}_0$ l'algèbre des matrices diagonales de coefficients $(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q)$. On a alors $\Delta(\mathfrak{p}^+) = \{x_i - y_j \colon i \in [1,p],\ j \in [1,q]\}$. On considère $u = (x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q)$ satisfaisant

$$x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_p \quad \text{et} \quad y_q \geqslant \cdots \geqslant y_1.$$

Rappelons maintenant qu'une *partition* est un suite décroissante λ d'entiers naturels $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_l \geqslant 0$. Les entiers $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont des parts. Le *poids* $|\lambda|$ désigne la somme des parts. Le *diagramme de Young* de λ, que nous notons également λ, s'obtient en superposant, de haut en bas, des lignes dont l'extrémité gauche est sur une

[1] Pour simplifier, on considère $\mathrm{U}(p,q)$ plutôt que $\mathrm{SU}(p,q)$.

même colonne, et de longueurs données par les parts de λ. Par symétrie diagonale, on obtient le diagramme de Young de la *partition conjuguée*, que nous notons λ^*. Soient λ et μ deux partitions telles que μ contienne λ, ce que nous noterons $\lambda \subset \mu$. Notons μ/λ le complémentaire du diagramme de λ dans celui de μ : c'est une *partition gauche* son diagramme est un *diagramme gauche*. Dans la pratique, les partitions que nous rencontrerons seront incluses dans la *partition rectangulaire* $p \times q = (\underbrace{q, \ldots, q}_{p \text{ fois}})$, le diagramme gauche $p \times q/\lambda$ est alors le diagramme de Young d'une partition auquel on a appliqué une rotation d'angle π ; nous notons $\hat{\lambda}$ cette partition, la *partition complémentaire* de λ dans $p \times q$.

Nous associons à l'élément $u \in i\mathfrak{t}_0$ un couple (λ, μ) de partitions comme suit.

– La partition $\lambda \subset p \times q$ est associée au sous-diagramme de Young de $p \times q$ constitué des cases de coordonnées (i, j) telles que $x_i > y_j$.
– La partition $\mu \subset p \times q$ est associée au sous-diagramme de Young de $p \times q$ constitué des cases de coordonnées (i, j) telles que $x_i \geqslant y_j$.

Il est immédiat que le couple de partitions (λ, μ) associé à u vérifie :

(i) la suite d'inclusion $\lambda \subset \mu \subset p \times q$, et
(ii) que le diagramme gauche μ/λ est une réunion de diagrammes rectangulaires $p_i \times q_i$, $i = 1, \ldots, m$, ne s'intersectant qu'en des sommets.

Réciproquement, étant donné un couple de partitions (λ, μ) vérifiant 1 et 2, on peut toujours trouver un élément $u \in i\mathfrak{t}_0$ tel que (λ, μ) soit le couple de partitions associé à u.

Nous dirons d'un couple de partitions (λ, μ) qu'il est *compatible* (ou *compatible dans* $p \times q$ en cas d'ambiguité) s'il vérifie les points 1 et 2 ci-dessus.

Soit $E = \mathbb{C}^p$ (resp. $F = \mathbb{C}^q$) la représentation standard de $\mathrm{U}(p)$ (resp. $\mathrm{U}(q)$). Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_q)$ les bases canoniques respectives de E et F. Comme représentations de $K_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}^+ = E \otimes F^*$ et $\mathfrak{p} = (E \otimes F^*) \oplus (E \otimes F^*)^*$. Il est bien connu (cf. [5]) qu'à chaque partition λ, il correspond une représentation irréductible E^λ de $\mathrm{GL}(E)$.

Considérons la représentation de $K_{\mathbb{C}}$

$$V(\lambda) := E^\lambda \otimes (F^{\lambda^*})^*. \tag{1}$$

C'est une sous-représentation irréductible de $\bigwedge^{|\lambda|}(E \otimes F^*)$; relativement à la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{k}$ constituée des matrices dans $\mathfrak{k}$, qui sont triangulaires supérieures sur E et triangulaires inférieures sur F, ses vecteurs de plus haut et de plus bas poids sont respectivement

$$v(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{\lambda_i} e_i \otimes f_j^* \quad \text{et} \quad w(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{\lambda_i} e_{p-i+1} \otimes f_{q-j+1}^*.$$

On peut montrer, cf. [5], que la représentation

$$\bigwedge \mathfrak{p}^+ = \bigwedge (E \otimes F^*) = \bigoplus_{\lambda \subset p \times q} V(\lambda), \tag{2}$$

où chaque sous-espace irréductible $V(\lambda)$ apparaît avec multiplicité un.

Soit maintenant (λ, μ) un couple compatible de partitions. Le vecteur

$$v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^* \in \bigwedge^{|\lambda|}(E \otimes F^*) \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|}(E \otimes F^*)^* = \bigwedge^{|\lambda|, |\hat{\mu}|} \mathfrak{p} \subset \bigwedge^{|\lambda| + |\hat{\mu}|} \mathfrak{p}$$

est un vecteur de plus haut poids et engendre donc sous l'action de $K_{\mathbb{C}}$ un sous-module irréductible que nous notons $V(\lambda, \mu)$.

D'après Vogan et Zuckerman [8], il existe un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible $A(\lambda, \mu)$ dont la classe d'équivalence est uniquement caractérisée par les deux propriétés suivantes.

$$A(\lambda, \mu) \textit{ est unitarisable avec le même caractère infinitésimal que la représentation triviale},$$
$$\mathrm{Hom}_K\big(V(\lambda, \mu), A(\lambda, \mu)\big) \neq 0. \tag{3}$$

Et alors

$$\big\{A(\lambda, \mu)\colon\ (\lambda, \mu) \text{ est un couple compatible de partitions}\big\}$$

est l'ensemble des $(\mathfrak{g}, K)$-modules ayant des groupes de $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie non nuls. La théorie de Matsushima permet de parler de la $A(\lambda, \mu)$-composante de la cohomologie $H^*(S)$ que nous notons $H^*(A(\lambda, \mu) : \Gamma)$ (cf. [8]). On appelle $A(\lambda, \mu)$-*composante fortement primitive* de la cohomologie $H^*(S)$ la partie $H^{\lambda,\mu}(S) = H^{|\lambda|+|\mu|}(A(\lambda, \mu) : \Gamma)$ de la $A(\lambda, \mu)$-composante de la cohomologie qui intervient en degré $|\lambda| + |\hat{\mu}|$ (le plus petit degré où la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie du module $A(\lambda, \mu)$ est non triviale).

Remarquons qu'en utilisant (2) et son dualisé, on peut écrire une base $\{C_\nu\colon\ \nu \subset p \times q\}$ de l'espace $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ des vecteurs K-invariants de $\bigwedge \mathfrak{p}$ paramétrée par l'ensemble des partitions $\nu \subset p \times q$. L'espace $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ s'identifie, d'après Cartan, à la cohomologie $H^*(\widehat{X})$ du dual compact $\widehat{X}$ de X, qui s'injecte elle-même dans $H^*(S)$, c'est la composante triviale $H^*(1_G : \Gamma)$ de la cohomologie. L'action naturelle des vecteurs de $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ sur $\bigwedge \mathfrak{p}$ correspond donc à une action de la cohomologie triviale $H^*(1_G : \Gamma)$ sur la cohomologie $H^*(S)$. C'est cette action que la proposition qui suit vise à comprendre.

Rappelons qu'une partition $\nu \subset p \times q$ est dite *image* d'un diagramme gauche μ/λ s'il existe une bijection entre les cases des diagrammes ν et μ/λ telle que si une case A est au-dessus (au sens large) et à gauche (au sens large) d'une case B dans l'un des diagrammes, les cases correspondantes A' et B' de l'autre diagramme sont dans l'ordre du numérotage inverse. Un résultat de Zelevinski affirme que le nombre d'images entre ν et μ/λ est égal à $c^{\mu}_{\lambda\nu}$ (nombre de Littlewood–Richardson).

Nous dirons d'une partition $\nu \subset p \times q$ qu'elle peut *s'inscrire* dans un diagramme gauche μ/λ si elle est une image d'un sous-diagramme gauche de μ/λ.

La proposition suivante [2, Proposition 11] est le résultat d'algèbre linéaire dont nous avons besoin.

Proposition 2.1. *Soient λ, μ et ν trois partitions incluses dans $p \times q$ telles que (λ, μ) forme un couple compatible. Alors, les énoncés suivants sont équivalents* :

(i) $C_\nu \cdot V(\lambda, \mu) \neq 0$ *dans* $\bigwedge \mathfrak{p}$;
(ii) *la partition ν s'inscrit dans μ/λ.*

3. Conséquences géométriques

Rappelons le critère de Venkataramana. Notons $\widehat{X}$ le dual compact de X, c'est la grassmannienne des sous-espaces complexes de dimension p dans $\mathbb{C}^{p+q}$. Soient $\hat{\Delta}$ la diagonale dans le produit $\widehat{X} \times \widehat{X}$ et $[\hat{\Delta}]$ la classe associée dans $H^*(\widehat{X} \times \widehat{X}) = H^*(\widehat{X}) \otimes H^*(\widehat{X})$. Nous avons rappelé qu'un théorème classique de Cartan identifie $H^*(\widehat{X})$ avec $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$, on peut donc identifier $[\hat{\Delta}]$ à un élément de $\big(\bigwedge \mathfrak{p}\big)^K \otimes \big(\bigwedge \mathfrak{p}\big)^K$. Le résultat fondamental de Venkataramana est alors le suivant (cf. [7]).

Critère de Venkataramana. *Soient (λ, μ) et (α, β) deux couples compatibles de partitions. Si $[\hat{\Delta}] \cdot V(\lambda, \mu) \otimes V(\alpha, \beta) \neq 0$, alors pour toute variété de Shimura S associée à G et pour toutes classes non triviales $\omega \in H^{\lambda,\mu}(S)$ et $\eta \in H^{\alpha,\beta}(S)$, le cup-produit de ω et de η est virtuellement non nul.*

Le Critère de Venkataramana et la Proposition 2.1 vont nous permettre de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soient (λ, μ) et (α, β) deux couples compatibles de partitions. Supposons qu'il existe une partition $\nu \subset p \times q$ telle que*

(i) *ν s'inscrive dans μ/λ, et*
(ii) *$\hat{\nu}$ s'inscrive dans β/α.*

Alors, pour toute variété de Shimura S associée à G et pour toutes classes non triviales $\omega \in H^{\lambda,\mu}(S)$ et $\eta \in H^{\alpha,\beta}(S)$, le cup-produit de ω et de η est virtuellement non nul.

Démonstration. Il est classique que l'algèbre $H^*(\widehat{X})$ est engendré par les classes de Chern du fibré tautologique sur $\widehat{X}$; vues dans $(\bigwedge \mathfrak{p})^K$ ces classes sont les $C_{(1^k)}$ pour $k = 1, \ldots, p$. D'après le critère de Venkataramana et la Proposition 2.1, il nous suffit de décomposer la classe $[\hat{\Delta}]$ dans la base $C_\nu \otimes C_{\nu'}$ de $H^*(\widehat{X} \times \widehat{X})$. Mais en utilisant la fonctorialité des classes de Chern totales comme dans la démonstration de [2, Lemme 14], on montre que

$$[\hat{\Delta}] = \sum_{\nu,\nu' \subset p \times q} c_{\nu\nu'}^{p\times q} C_\nu \otimes C_{\nu'}.$$

On conclut imméditatement la démonstration en se rappelant que $c_{\nu\nu'}^{p\times q}$ est non nul (égal à 1) si et seulement si $\nu' = \hat{\nu}$.

Le Théorème 3.1 implique immédiatement le Théorème 1.1. De plus, lorsque les classes ω et η sont holomorphes (alors $\mu = \beta = p \times q$), la condition nécessaire est en fait suffisante dans le sens que si (i) ou (ii) n'est pas vérifiée le cup-produit de ω et de η est (virtuellement) nul. On retrouve ainsi un résultat de Parthasarathy [6] et Clozel [4]. En particulier, le produit d'une classe $\omega \in H^{(1^p),p\times q}(S)$ par une classe $\eta \in H^{(q),p\times q}(S)$ est toujours (virtuellement) nul. De telles classes non triviales apparraissent bel et bien dans la cohomologie de certaines variétés de Shimura S comme au-dessus, cf. [1]. La condition $k + l \leqslant p + q - 1$ dans le Théorème 1.1 est donc bien nécessaire.

Références

[1] G. Anderson, Theta functions and holomorphic differential forms on compact quotients of bounded symmetric domains, Duke Math. J. 50 (1983) 1137–1170.
[2] N. Bergeron, Tentative d'épuisement de la cohomologie d'une variété de Shimura par restriction à ses sous-variétés, math.NT/0403407, v1 24 Mar 2004.
[3] L. Clozel, Produits dans la cohomologie holomorphe des variétés de Shimura, J. Reine Angew. Math. 430 (1992) 69–83.
[4] L. Clozel, Produits dans la cohomologie holomorphe des variétés de Shimura II : calculs et applications, J. Reine Angew. Math. 444 (1993) 1–15.
[5] W. Fulton, Young tableaux, Cambridge University Press, 1997.
[6] R. Parthasarathy, Holomorphic forms in $\Gamma \backslash G/K$ and Chern classes, Topology 21 (1982) 157–178.
[7] T.N. Venkataramana, Cohomology of compact locally symmetric spaces, Compositio Math. 125 (2001) 221–253.
[8] D. Vogan, G. Zuckerman, Unitary representations with cohomology, Compositio Math. 53 (1984) 51–90.