Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 539–542
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Sur les théorèmes de Serre, Bass et Forster–Swan

Lionel Ducos

Laboratoire de mathématiques, UMR CNRS 6086, université de Poitiers, 86960 Futuroscope, France

Reçu le 16 juin 2004 ; accepté le 3 septembre 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Cette Note présente une nouvelle approche (élémentaire) du Serre's Splitting Off Theorem, des Bass's Stable Range and Cancellation Theorems et du Forster–Swan's Theorem. Une nouvelle dimension pour les anneaux commutatifs et les formes multilinéaires alternées donnent un moyen (explicite) d'obtenir des vecteurs unimodulaires, sans hypothèse noethérienne. ***Pour citer cet article : L. Ducos, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

On the Serre, Bass and Forster–Swan theorems. This Note introduces a new approach to Serre's Splitting Off Theorem, Bass's Stable Range and Cancellation Theorems, and Forster–Swan's Theorem. A new dimension for commutative rings and some multilinear alternating maps give a means of getting unimodular vectors, without noetheriannity hypothesis. ***To cite this article: L. Ducos, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction, notations et définition de la H-dim

Deux questions initiales, indépendantes a priori, mais liées en réalité (voir [3,5] ou [1] par exemple) :

– Peut-on majorer le cardinal d'un système générateur d'un module de type fini (sur un anneau commutatif) ? Des réponses positives existent déjà : elles font intervenir la dimension de l'anneau de base (ou de ses quotients) et un majorant du nombre de générateurs locaux.
– Dans un module, s'il existe un vecteur v unimodulaire modulo un scalaire a (i.e. il existe une forme linéaire μ telle que $\mu(v)$ inversible modulo a), existe-t-il un vecteur v' unimodulaire (i.e. il existe une forme linéaire μ' telle que $\mu'(v')$ inversible) ? Nous montrerons (Corollaire 2.2) qu'il suffit, par exemple, que le scalaire a soit

Adresse e-mail : ducos@math.univ-poitiers.fr (L. Ducos).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.09.010

dans l'image d'une forme n-linéaire alternée où n est un entier quelconque strictement supérieur à la dimension de l'anneau. (Ce résultat sera ensuite généralisé dans le Théorème 2.3 et le Corollaire 2.4.)

On voit bien à ce propos que se donner une dimension adéquate pour les anneaux commutatifs est important. Après la dimension de Krull (que nous notons K-dim) utilisée par Forster dans [4], la dimension j-dim a été étudiée, notamment par Swan dans [7] ou Eisenbud et Evans dans [3] (en particulier j-dim $\leqslant$ K-dim). Notons que ces travaux ont été réalisés dans un cadre noethérien.

À son tour, mais sur un terrain non noethérien, Heitmann a proposé dans [5] une nouvelle J-dim (en particulier J-spectrum $\supset$ j-spectrum, avec égalité en situation noethérienne). Dans ce document, une nouvelle dimension (Définition 1.2) est utilisée, la H-dim, vérifiant H-dim $\leqslant$ J- dim. Ainsi toutes les propositions possédant une hypothèse du type « pour tout entier supérieur à la dimension de l'anneau » s'en trouvent légèrement améliorées.

De plus, tout comme Heitmann, notre discours ne fait appel à aucune hypothèse noethérienne. Nous nous différencions cependant de Heitmann (c'est là un point important à nos yeux) par le contenu élémentaire de nos propositions. Enfin, nous avons pris soin d'écrire les énoncés le plus explicitement possible...

Notations. À partir de maintenant, A est un anneau commutatif, et

- on note $\sqrt{0}$ le radical nilpotent de A (intersection des idéaux premiers) et $\mathrm{Rad}(A)$ le radical de Jacobson (intersection des idéaux maximaux) ;
- on note M^* le dual d'un A-module M, et $L_a^k(M)$ le A-module des formes k-linéaires alternées de M ;
- pour deux sous-A-modules K et J, le transporteur de K dans J est l'idéal $(J : K) = \{x \in A \mid xK \subset J\} = \mathrm{Ann}(K + J \,/\, J)$
- on note $\text{K-dim}(A)$ la dimension de Krull de l'anneau A ;
- dans tout le document, $\text{K-dim}(A)$ et $\text{H-dim}(A)$ (voir la Définition 1.2) sont supposés fini.

Théorème 1.1 (voir [2]). *Pour tout $x \in A$, on pose $N_x = xA + (\sqrt{0} : x)$. On a alors*

$$\text{K-dim}(A) \leqslant d \iff \forall x \in A,\ \text{K-dim}(A/N_x) \leqslant d - 1.$$

Définition 1.2 (*voir* [1]). Pour un élément $x \in A$, on définit l'*idéal-bord de x* par $J_x := xA + (\mathrm{Rad}(A) : xA)$.

On dit que $\text{H-dim}(A) \leqslant d$ lorsque pour tout élément $x \in A$, l'anneau A/J_x est de H-dim inférieure à $d - 1$, avec $\text{H-dim}(\{0\}) = -1$.

Lemme 1.3. *Si* $\text{H-dim}(A)$ *est finie alors* $\text{H-dim}(A) \leqslant \text{K-dim}(A)$. *On a l'égalité en particulier si A est un anneau de Jacobson. Par ailleurs, la* H-dim *d'un quotient de A est inférieure ou égale à celle de A.*

2. Formes multilinéaires alternées et H-dim

Proposition 2.1. *Soit un entier $n >$ H-dim(A) et un A-module M. On suppose qu'il existe un scalaire $a \in A$, des vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in M$ et des formes linéaires $\mu_1, \ldots, \mu_n \in M^*$ tels que $\mu_j(v_i) = a\delta_{ij}$ pour $i \leqslant j$ (δ est le symbole de Kronecker). Alors pour tout vecteur $v \in M$ et toute forme linéaire $\mu \in M^*$ vérifiant $A\mu(v) + aA = A$, on peut construire un vecteur $v' \in v + a\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ et une forme linéaire $\mu' \in \langle \mu, \mu_1, \ldots, \mu_n\rangle$ tels que $\mu'(v') = 1$.*

Corollaire 2.2. *On considère un A-module M, un entier $n >$ H-dim(A), des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ et une forme n-linéaire alternée $g \in L_a^n(M)$. On pose $a = g(v_1, \ldots, v_n)$. Alors pour tout vecteur $v \in M$ et toute forme linéaire $\mu \in M^*$ tels que $A = A\mu(v) + aA$, il existe $v' \in v + a\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ tel que $A = A\mu(v') + \sum_i Ag(v_1, \ldots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \ldots, v_n)$. En particulier, v' est unimodulaire : $A = M^*(v')$.*

Théorème 2.3. *On considère deux A-modules $N \subset M$, un entier $n > \text{H-dim}(A)$, des formes n-linéaires alternées $f_1, \dots, f_s \in L_a^n(M)$. Pour tout vecteur $w \in M$ et toute forme linéaire $\tau \in M^*$ tels que $A = A\tau(w) + \sum_i Af_i(N^n)$, il existe $w' \in w + N$ tel que $A = A\tau(w') + \sum_i Af_i(w', N^{n-1})$.*

Corollaire 2.4. *On considère deux A-modules $N \subset M$, trois entiers $h = \text{H-dim}(A)$, $t \in \mathbb{N}$, $n \geqslant h + t$ et des formes n-linéaires alternées $g_1, \dots, g_s \in L_a^n(M)$. Pour toute forme t-linéaire alternée $g \in L_a^t(M)$ et t-uplet $c = (c_1, \dots, c_t) \in M^t$ tels que $A = Ag(c) + \sum_{i=1}^s Ag_i(N^n)$ il existe $c' \in c + N^t$ tel que $A = Ag(c') + \sum_{i=1}^s Ag_i(c', N^h)$ En particulier, il existe $g' \in L_a^t(M)$ tel que $g'(c') = 1$.*

3. Vecteurs unimodulaires et facteurs directs

Lemme 3.1. *Soit M un A-module, $g \in L_a^t(M)$ et $w_1, \dots, w_t \in M$ tels que $1 = g(w_1, \dots, w_t)$. Alors $M = Aw_1 \oplus \cdots \oplus Aw_t \oplus M'$ où M' est l'intersection des noyaux des formes linéaires $g(w_1, \dots, w_{i-1}, *, w_{i+1}, \dots, w_t)$ pour i parcourant $\{1, \dots, t\}$.*

Définition 3.2. Pour tout A-module M, on pose $\text{LA}(M, n) := \sum_{f \in L_a^n(M)} f(M^n)$.

Un A-module projectif de type fini M satisfait $A = \text{LA}(M, n)$ si et seulement si son rang local est partout supérieur ou égal à n.

Corollaire 3.3 (Serre's Splitting Off Theorem with H-dim). *Pour tout A-module M vérifiant $A = \text{LA}(M, h + t)$ où $h = \text{H-dim}(A)$ et $t \in \mathbb{N}$, il existe des vecteurs $w_1, \dots, w_t \in M$ tels que $A = \sum_{f \in L_a^{h+t}(M)} Af(w_1, \dots, w_t, M^h)$. En particulier, il existe $M' \subset M$ tel que $M = Aw_1 \oplus \cdots \oplus Aw_t \oplus M'$.*

Lemme 3.4. *On considère deux A-modules $N \subset M$, un entier $n > \text{H-dim}(A)$, un scalaire $a \in A$, des n-uplets $X^1, \dots, X^s \in N^n$ et des formes n-linéaires alternées $f_1, \dots, f_s \in L_a^n(M)$. Alors pour tout vecteur w unimodulaire modulo aA et unimodulaire modulo $\sum_i Af_i(X^i)$, il existe un vecteur $w' \in w + aN$ unimodulaire.*

Corollaire 3.5 (Bass's Stable Range Theorem with H-dim). *Soit M un A-module tel que $A = \text{LA}(M, \text{H-dim}(A) + 1)$. Pour tout vecteur v unimodulaire modulo un scalaire $a \in A$, il existe $v' \in v + aM$ unimodulaire.*

Corollaire 3.6 (Bass's Cancellation Theorem with H-dim). *Soit M un A-module tel que $A = \text{LA}(M, \text{H-dim}(A) + 1)$. Si P et Q sont deux A-modules (P supposé de plus projectif de type fini) tels que $Q \times P$ et $M \times P$ sont isomorphes alors Q et M sont isomorphes.*

4. Systèmes générateurs d'un module de type fini

Lemme 4.1. *On considère un entier $n \geqslant \text{H-dim}(A) + t$ (où $t \in \mathbb{N}$), le module $M = A^{t+n}$ et la matrice carrée ci-contre où $L \in \mathbf{M}_{t,n}(A)$, $L' \in \mathbf{M}_{n,t}(A)$ et Id_i désigne la matrice identité en dimension i. On note respectivement $c_1, \dots, c_t, v_1, \dots, v_n \in M$ les colonnes de celle-ci. Si $A = aA + bA$ alors il existe des $c_i' \in c_i + \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ pour tous les $i \in \{1, \dots, t\}$ et une forme t-linéaire alternée $f \in L_a^t(M)$ tels que $f(c_1', \dots, c_t') = 1$.*

$$\begin{pmatrix} a\,\text{Id}_t & L \\ L' & b\,\text{Id}_n \end{pmatrix}$$

Proposition 4.2. *Soit $t + n$ vecteurs $d_1, \dots, d_t, w_1, \dots, w_n$ d'un A-module M où $n \geqslant \text{H-dim}(A) + t$. Si on a $A = (\langle d_1, \dots, d_t \rangle : M) + (\langle w_1, \dots, w_n \rangle : M)$ alors il existe des $w_i' \in w_i + \langle d_1, \dots, d_t \rangle$ pour tous les $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que M soit engendré par les n vecteurs $w_1', \dots, w_n'$.*

Définition 4.3. Pour deux A-modules $N \subset M$ de type fini et un entier $r \in \mathbb{N}$, on définit les idéaux de A $I(N,r,M) := \sum_{d \in N^r} (\langle d_1, \ldots, d_r \rangle : M)$ et $I(M,r) := I(M,r,M)$

Lemme 4.4 (voir [6], page 105).

- *Pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ fixé dans A, le $A_{\mathfrak{p}}$-module $M_{\mathfrak{p}}$ est engendré par t vecteurs si et seulement si $I(M_{\mathfrak{p}}, t) = A_{\mathfrak{p}}$, ou encore $I(M,t) \not\subset \mathfrak{p}$ (M est de type fini) : plus précisément $I(M_{\mathfrak{p}}, t) = I(M,t)_{\mathfrak{p}}$.*
- *Par conséquent, un A-module M de type fini est localement (en tous les idéaux premiers) engendré par t vecteurs si et seulement si $I(M,t) = A$.*

Corollaire 4.5. *Soit deux A-modules $N \subset M$ de type fini et n vecteurs $w_1, \ldots, w_n \in M$ tels que $A = I(N,t,M) + (\langle w_1, \ldots, w_n \rangle : M)$. Si $n \geqslant \text{H-dim}(A) + t$, alors il existe des $w'_i \in w_i + N$ pour tous les $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que M soit engendré par les n vecteurs $w'_1, \ldots, w'_n$.*

Corollaire 4.6 (First Forster's Theorem with H-dim). *Un A-module de type fini localement (en tous les idéaux premiers) engendré par t vecteurs est engendré globalement par* H-dim$(A) + t$ *vecteurs.*

<u>Renforcement.</u> Posons r la valeur maximale des $\mu_{\mathfrak{p}}(M)$ pour $\mathfrak{p}$ parcourant Spec(A). On a alors

$$\max_{t \in \{1,\ldots,r\}} \text{K-dim}\big(A/I(M,t-1)\big) + t = \max_{\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)} \text{K-dim}(A/\mathfrak{p}) + \mu_{\mathfrak{p}}(M)$$

où $\max_{\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)}(\text{K-dim}(A/\mathfrak{p}) + \mu_{\mathfrak{p}}(M))$ est la borne donnée par Forster dans [4].

Lemme 4.7. *Soit M un A-module de type fini et n vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in M$. Si $A = I(M,s) + (\langle v_1, \ldots, v_n \rangle : M)$ et $n \geqslant \max_{t \in \{1,\ldots,s\}}(\text{H-dim}(A/I(M,t-1)) + t)$, alors M est engendré par n vecteurs.*

Corollaire 4.8 (Forster–Swan's Theorem with H-dim). *Si M est un A-module de type fini localement (en tous les idéaux premiers) engendré par r vecteurs, alors M est engendré globalement par* $\max_{t \in \{1,\ldots,r\}}(\text{H-dim}(A/I(M,t-1)) + t)$ *vecteurs.*

Remerciements

Je remercie C. Quitté, ainsi que H. Lombardi et T. Coquand, pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée.

Références

[1] T. Coquand, H. Lombardi, C. Quitté, Generating non-Noetherian modules constructively, prepublication, 2004, http://hlombardi.free.fr/publis/Prepublis.html.
[2] T. Coquand, H. Lombardi, M.-F. Roy, Une caractérisation élémentaire de la dimension de Krull, prepublication, 2003, http://hlombardi.free.fr/publis/Prepublis.html.
[3] D. Eisenbud, E. Evans, Generating modules efficiently: theorems from algebraic K-theory, J. Algebra 27 (1973) 278–305.
[4] O. Forster, Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, Math. Z. 84 (1) (1964) 80–87.
[5] R. Heitmann, Generating non-Noetherian modules efficiently, Michigan Math. J. 31 (1984) 167–180.
[6] E. Kunz, Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Birkhäuser, Boston, 1985.
[7] R.G. Swan, The number of generators of a module, Math. Z. 102 (4) (1967) 318–322.