Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 561–566

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Contrôle optimal

Stabilisation d'un système de la thermoélasticité anisotrope avec feedbacks non linéaires

Amar Heminna [a], Serge Nicaise [b], Abdoulaye Sene [c,1]

[a] *Faculté de mathématiques, U.S.T.H.B, Alger, Algérie*
[b] *Université de Valenciennes, MACS, ISTV, 59313 Valenciennes cedex 9, France*
[c] *Département de mathématiques, faculté des sciences U.C.A.D, Dakar, Sénégal*

Reçu le 17 décembre 2003 ; accepté après révision le 28 août 2004

Disponible sur Internet le 1er octobre 2004

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Dans cette Note on étudie la stabilisation d'un système de la thermoélasticité anisotrope linéaire avec condition (naturelle) de Neumann sur une partie du bord, à l'aide de feedbacks non linéaires, l'un interne et/ou l'autre frontière. La démarche utilisée consiste à montrer la stabilisation exponentielle du système linéaire en établissant une inégalité intégrale, obtenue par la technique de Bey et al. [E.J.D.E. 78 (2001) 1–23] ; la stabilisation du système non linéaire s'en déduit grâce aux résultats de Nicaise [Rendiconti Di Matematica, Ser. VII 23 (2003) 83–116]. ***Pour citer cet article : A. Heminna et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Stabilization of a system of anisotropic thermoelasticity by nonlinear feedbacks. In this Note we study the stabilization of an anisotropic thermoelasticity system with (natural) Neumann boundary condition and nonlinear internal and/or boundary feedbacks. Our method consists of showing the exponential stability of the linear system by using an integral inequality, obtained by the technique of Bey et al. [E.J.D.E. 78 (2001) 1–23]; the stabilisation of the nonlinear system is deduced owing to the results from Nicaise [Rendiconti Di Matematica, Ser. VII 23 (2003) 83–116]. ***To cite this article: A. Heminna et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Adresses e-mail : ahemina@hotmail.com (A. Heminna), snicaise@univ-valenciennes.fr (S. Nicaise), abdousen@ucad.sn (A. Sene).

[1] Le travail de A. Sène a éte réalisé au MACS grâce au soutien financier de l'AUF.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.08.008

Abridged English version

Let Ω be a nonempty bounded open subset of $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$, with a boundary Γ of class C^2. For a fixed $x_0 \in \mathbb{R}^n$ we define the function $m(x) = x - x_0$; $x \in \mathbb{R}^n$ and the partition (1) of the boundary Γ.

In this Note we consider the system of anisotropic thermoelasticity (3), where the coupling parameters α and β are supposed to be positive, the function $a \in C^1(\Gamma_2)$ is nonnegative; the functions f and g are continuous and satisfy (4).

The stabilization of different variants of the system (3) has been studied in the literature, notably in [7,9] in the isotropic case but with *nonnatural* boundary conditions, namely by remplacing in (3) the term $\sigma(u) \cdot \nu$ by $\mu \frac{\partial u}{\partial n} + (\lambda + \mu)\nu \operatorname{div} u$. In [7], Liu considered the case $f = 0$ and the *linear* feedback, i.e., $g(x) = x$. Recently, Liu and Zuazua [9] have established, still in the case $f = 0$, exponential, polynomial or logarithmic decay of the energy for some nonlinearities g. The aim of this work is to generalize these results to the case of an anisotropic system, to the case $f \neq 0$ and to the case of natural boundary conditions. This last case answers to a question posed in [9]. For this purpose, in the linear case we establish integral inequalities as in [7] and [2] leading to the exponential decay and in the nonlinear case, we use the theorical results established in [10]. In fact the results from [10] guarantee that, if the linear system has an exponential decay, then the nonlinear system is automatically stable, the decay rate being related to the properties of the nonlinearity. The main idea from [10] is to use Liu's principle in a abstract setting and an appropriate integral inequality.

The stabilization of the isotropic elastodynamic system with natural boundary conditions and a linear feedback have been treated in [4] without geometrical condition on Γ_1, extending former results from [6,1] obtained under strong geometrical constraints. The case of the anisotropic elastodynamic system with variable coefficients and natural boundary conditions was considered in [2] under the geometrical conditions (1) and (2) using the multiplier method and expressing some boundary integrals in local coordinates. It would be interesting to see if the use of Horn's method [4] to our system would allow us to eliminate these geometrical conditions.

The main result of our Note is the following theorem:

Theorem 0.1. *Let Γ_1 and Γ_2 be given by* (1) *and satisfying* (2) *and* (5)*. Assume that the functions $f \neq 0$ or $g \neq 0$ satisfy* (4), (6) *as well as the inequalities* (9)–(11)*, where d is a positive constant and G a concave function defined on $\mathbb{R}_+$ such that $G(0) = 0$. Then there exist positive constants τ, r_1, r_2 and a time $T_1 > 0$* (*depending on $\tau, E(0), |\Gamma_2|, |\Omega|$*) *such that the energy of any solution of* (3) *defined by* (8) *satisfies* (12)*, where Ψ is given by $\Psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\Phi(s)} \,\mathrm{d}s$, with $\Phi(s) = \tau R_1 G^{-1}(\frac{s}{r_2})$.*

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$, de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ le vecteur unitaire normal extérieur à Γ. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, on définit la fonction $m(x) = x - x_0$; $x \in \mathbb{R}^n$ et une partition de la frontière Γ de la manière suivante :

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma\colon\ m(x) \cdot \nu(x) \leqslant 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1. \tag{1}$$

Afin d'éviter des problèmes de régularité des solutions là où les conditions au bord changent, nous supposons que

$$\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \emptyset. \tag{2}$$

Notons que cette hypothèse implique que Ω est soit étoilé (cas $\Gamma_2 = \emptyset$) ou a un bord multiplement connexe. Comme nous imposons des conditions de bord de Dirichlet pour la température et des conditions mixtes pour le déplacement (voir le système (3) ci-dessous), le problème de régularité de la solution de notre système se réduit à celui du système de l'élastodynamique. Nous renvoyons donc à [3] pour le traitement du cas $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} \neq \emptyset$ (cas des polygones).

On considère le système de la thermoélasticité anisotrope :

$$\begin{cases} u'' - \operatorname{div}\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + f(u') = 0 & \text{dans } Q := \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta \operatorname{div} u' = 0 & \text{dans } Q, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Sigma := \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_1 := \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma(u)\cdot\nu + au + g(u') = 0 & \text{sur } \Sigma_2 := \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0, \quad u'(\cdot,0) = u_1, \quad \theta(\cdot,0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où $u = u(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))$ désigne le vecteur déplacement, $\theta = \theta(x,t)$ la température et σ le tenseur des contraintes défini par $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)$ (on adopte la convention des indices répétés), $\varepsilon(u)$ étant le tenseur des déformations donné par $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$, $(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i})$ et les coefficients constants a_{ijkl} sont tels que $a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}$ et vérifient la condition d'ellipticité : $a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geqslant \delta\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ $(\delta > 0)$, pour tout tenseur symétrique ε_{ij}. Les composantes du champ vectoriel $\operatorname{div}\sigma(u)$ sont données par $(\operatorname{div}\sigma(u))_i = \partial_j\sigma_{ij}$, $i = i, \dots, n$. Les paramètres de couplage α et β sont supposés strictement positifs. La fonction a est $\geqslant 0$ et appartient à $C^1(\Gamma_2)$; les fonctions f et g sont continues et satisfont

$$f(0) = g(0) = 0, \quad \big(f(x) - f(y)\big)\cdot(x-y) \geqslant 0, \quad \big(g(x) - g(y)\big)\cdot(x-y) \geqslant 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

La stabilisation de ce système sans feedback a été analysée dans [8] et peut ne pas être garantie pour certains domaines car l'amortissement produit par l'équation de la chaleur n'est pas suffisant. Dès lors il est naturel d'étudier la stabilisation de ce système en ajoutant des termes additionnels d'amortissement. Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs, notamment dans [7,9] pour le cas isotrope mais avec des conditions au bord *non naturelles*, c'est-à-dire en remplaçant dans (3) le terme $\sigma(u)\cdot\nu$ par $\mu\frac{\partial u}{\partial n} + (\lambda+\mu)\nu \operatorname{div} u$. Dans [7], Liu a considéré le cas $f = 0$ et le feedback *linéaire*, i.e., $g(x) = x$. Récemment, Liu et Zuazua [9] ont établi, toujours dans le cas $f = 0$, une décroissance exponentielle, polynomiale ou logarithmique de l'énergie pour certaines nonlinéarités de g.

Le but de ce travail est de généraliser ces résultats au cas des conditions aux limites *naturelles*, ce qui répond à une question posée dans [9]. Nous considérons de plus les différents cas suivants : contrôle frontière uniquement ($f = 0$), contrôle interne uniquement ($g = 0$) ou contrôle simultané ($f \neq 0$ et $g \neq 0$). Pour cela, dans le cas linéaire on établit des inégalités intégrales comme dans [7] et [2] qui permettent d'obtenir la décroissance exponentielle et dans le cas non linéaire, on utilise les résultats théoriques établis dans [10]. Les résultats de [10] garantissent en fait que, si le système linéaire a une décroissance exponentielle, alors le système non linéaire est automatiquement stable, le taux de décroissance pouvant être exprimé en fonction des propriétés de la nonlinéarité. Rappelons que la démarche de [10] utilise le principe de Liu dans un cadre abstrait et une inégalité intégrale appropriée. Plus précisément le principe de Liu consiste à estimer l'énergie du système direct (non linéaire) par des termes relatifs au feedback en utilisant le système linéaire rétrograde avec donnée finale égale à la donnée finale du système direct. Ces termes sont alors estimés en utilisant la stabilité exponentielle du système linéaire rétrograde et une inégalité intégrale appropriée.

La stabilisation du système de l'élastodynamique isotrope avec conditions au bord naturelles et feedback linéaire a été traité dans [4] sans condition géométrique sur Γ_1, en utilisant la méthode des multiplicateurs, des résultats optimaux de trace et la propriété du prolongement unique pour le système statique correspondant. Ces résultats étendent des résultats antérieurs de [6,1] obtenus sous des contraintes géométriques fortes. Le cas du système de l'élastodynamique anisotrope à coefficients variables avec conditions au bord naturelles a été traité dans [2] sous les conditions géométriques (1) et (2) par la méthode des multiplicateurs en exprimant les intégrales de bord en coordonnées locales. Il serait intéressant de voir si l'utilisation de la méthode de Horn [4] à notre système permettrait d'éliminer ces conditions géométriques.

2. Existence et unicité de la solution

On ramène (3) à un problème d'évolution du premier ordre. Dans la suite on suppose que

$$\operatorname{int}\Gamma_1 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad a(x) > 0,\ \forall x \in \Gamma_2, \tag{5}$$

et qu'il existe des constantes non négatives κ, κ' quelconques si $n \leqslant 2$ et égales à $\kappa = \frac{n}{n-2}$ et $\kappa' = \frac{n+2}{n-2}$ si $n \geqslant 3$ et des constantes positives C_f, C_g telles que :

$$\bigl|f(x)\bigr| \leqslant C_f\bigl[1+|x|^{\kappa'}\bigr], \quad \bigl|g(x)\bigr| \leqslant C_g\bigl[1+|x|^{\kappa}\bigr], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

On définit les espaces de Hilbert suivants : $H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ et $\mathcal{H} = (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n \times L^2(\Omega)$. On note par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la dualité entre $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ et $[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ ou entre $H^1_0(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, et par $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. De plus, on définit les opérateurs $A : (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \mapsto [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$, $A_0 : H^1_0(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$ et B_0 de $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ dans $[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ par :

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\,\mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in \bigl(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\bigr)^n, \quad \langle A_0u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in H^1_0(\Omega),$$

$$\langle B_0u, v\rangle = \int_{\Gamma_2} g(u)\cdot v\,\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega f(u)\cdot v\,\mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in \bigl(H^1_{\Gamma_1}(\Omega)\bigr)^n.$$

Lemme 2.1. *Si les fonctions f et g vérifient* (6)*, alors l'opérateur B_0 est bien défini.*

Ce lemme est une conséquence des injections de Sobolev et de théorèmes de trace (cf. Lemme 3.1 de [9] ou [10, §6]).

En posant $\Phi = (u, u', \theta)$ et $\mathcal{A}\Phi = (-u', Au + B_0u' + \alpha\nabla\theta, A_0\theta + \beta\,\mathrm{div}(u'))$, le système (3) se réduit à :

$$\Phi' + \mathcal{A}\Phi = 0, \quad \Phi(0) = (u_0, u_1, \theta_0). \tag{7}$$

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses précédentes, l'opérateur $\mathcal{A}$ défini ci-dessus et de domaine*

$$D(\mathcal{A}) = \bigl\{(u, v, \theta) \in \mathcal{H}:\ v \in \bigl(H^1_{\Gamma_1}\bigr)^n, Au + B_0v \in \bigl(L^2(\Omega)\bigr)^n, \theta \in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)\bigr\}$$

est maximal monotone dans $\mathcal{H}$. De plus, $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.

La preuve de ce lemme est similaire à celle du Lemme 3.2 de [9]. Vu la condition géométrique (2), la théorie classique de régularité pour des opérateurs elliptiques peut s'appliquer. Dès lors, en utilisant des injections de Sobolev, le domaine $D(\mathcal{A})$ peut être explicitement caractérisé en fonction des propriétés des nonlinéarités (voir par exemple [9, Lemme 3.3]).

Grâce à la théorie des semi-groupes nonlinéaires, on obtient le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.3. *Soient Γ_1 et Γ_2 définis par* (1) *et satisfaisant* (2) *et* (5)*. On suppose que les fonctions f et g vérifient* (4) *et* (6)*. Alors, pour des conditions initiales $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$, le système* (3) (*ou* (7)) *admet une solution* (*faible*) *unique (u, θ) vérifiant $(u, u', \theta) \in C([0, \infty); \mathcal{H})$.*

3. Stabilisation du système

L'énergie de la solution du système (3) peut être définie par :

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|u'|^2+\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)+\frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right\}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}a|u|^2\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{8}$$

L'hypothèse (4) implique la décroissance de l'énergie. Sous des hypothèses complémentaires sur f et g, nous allons maintenant préciser différents types de décroissance. Dans la suite nous supposons que $f\neq 0$ ou $g\neq 0$. Introduisons les paramètres α_f et α_g définis comme suit : $\alpha_f=0$ si $f=0$ et $\alpha_f=1$ sinon et de même pour g. La condition précédente peut s'exprimer par la condition $\alpha_f+\alpha_g\geqslant 1$.

Le résultat principal de cette note est le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soient Γ_1 et Γ_2 donnés par* (1) *et vérifiant* (2) *et* (5). *On suppose que $f\neq 0$ ou $g\neq 0$ et satisfont* (4), (6) *ainsi que les conditions* :

$$f(x)\cdot x\geqslant\alpha_f\,\mathrm{d}|x|^2,\quad g(x)\cdot x\geqslant\alpha_g\,\mathrm{d}|x|^2,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |x|\geqslant 1, \tag{9}$$

$$\alpha_g|x|^2+\left|g(x)\right|^2\leqslant\alpha_g G\big(g(x)\cdot x\big),\quad\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |x|\leqslant 1, \tag{10}$$

$$\alpha_f|x|^2+\left|f(x)\right|^2\leqslant\alpha_f G\big(f(x)\cdot x\big),\quad\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |x|\leqslant 1, \tag{11}$$

où d est une constante positive et G une fonction concave définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $G(0)=0$. Alors, il existe une constante $\tau>0$, des constantes r_1,r_2 et un temps $T_1>0$ (dépendant de τ, $E(0)$, $|\Gamma_2|$, $|\Omega|$) tels que l'énergie de toute solution de (3) *vérifie*

$$E(t)\leqslant r_2 G\left(\frac{\Psi^{-1}(r_1t)}{r_1\tau t}\right),\quad\forall t\geqslant T_1, \tag{12}$$

où Ψ est donnée par $\Psi(t)=\int_t^1\frac{1}{\Phi(s)}\,\mathrm{d}s$, avec $\Phi(s)=\tau R_1G^{-1}(\frac{s}{r_2})$.

Preuve. Suivant la méthodologie développée dans [10], la stabilisation du système nonlinéaire (3) se réduit à la stabilisation exponentielle du système linéaire associé (qui correspond à (3) avec $f(u')=\alpha_f u'$ et $g(u')=\alpha_g u'$). Pour établir la stabilisation exponentielle de ce système, on considère d'abord des solutions fortes (u,θ) de ce système et on établit des inégalités intégrales. En posant $M(u)=2(m\cdot\nabla)u+(n-1)u$, $\Sigma_T=\Gamma\times(0,T)$, $\Sigma_{iT}=\Gamma_i\times(0,T)$, $i=1,2$, en multipliant l'identité $u''-\operatorname{div}\sigma(u)+\alpha\nabla\theta+\alpha_f u'=0$ dans $Q_T:=\Omega\times(0,T)$ par $M(u)$ et en intégrant par parties sur Q_T, on obtient :

$$\begin{aligned}2\int_0^T E(t)\,\mathrm{d}t={}&-\big(u',M(u)\big)\mid|_0^T+\int_{\Sigma_{2T}}\big((m\cdot\nu)|u'|^2+a|u|^2\big)\,\mathrm{d}\Sigma-\alpha_f\int_{Q_T}u'\cdot M(u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&-\alpha\int_{Q_T}\nabla\theta\cdot M(u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T}\theta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{\Sigma_T}\big[\big(\sigma(u)\cdot\nu\big)\cdot M(u)-m\cdot\nu\sigma(u):\varepsilon(u)\big]\,\mathrm{d}\Sigma.\end{aligned}$$

Dans la suite on désignera par C une constante positive assez grande et par ε un nombre positif assez petit, tout deux indépendants de T.

On montre de manière classique que $-(u',M(u))|_0^T\leqslant CE(0)$.

L'inégalité de Young permet de montrer que :

$$\int_{Q_T}\left(-\alpha_f u'\cdot M(u)+\alpha\left[\nabla\theta\cdot M(u)+\frac{1}{\beta}\theta^2\right]\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{C}{\varepsilon}\int_{Q_T}\left(\alpha_f|u'|^2+\frac{\alpha}{\beta}|\nabla\theta|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\varepsilon\int_0^T E(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme dans [2], en exprimant les intégrales de bord en coordonnées locales on montre que :

$$\int_{\Sigma_T} \left[\left(\sigma(u)\cdot\nu\right)\cdot M(u) - m\cdot\nu\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)\right]\mathrm{d}\Sigma \leqslant C\left[E(0) + \int_{\Sigma_{2T}} \left(|u|^2 + \alpha_g|u'|^2\right)\mathrm{d}\Sigma\right].$$

On établit enfin, comme dans [5] et [11] que $\int_{\Sigma_{2T}} |u|^2\,\mathrm{d}\Sigma \leqslant \frac{C}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)\,\mathrm{d}t$.

En regroupant ces différentes estimations on aboutit à

$$\int_0^T E(t)\,\mathrm{d}t \leqslant CE(0) + C\left(\alpha_f\int_{Q_T} |u'|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \alpha_g\int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2\,\mathrm{d}\Sigma\right). \tag{13}$$

Cette estimation reste valable pour les solutions faibles par un argument de densité. Par un argument standard [5], l'inégalité (13) implique la décroissance exponentielle de l'énergie de la solution du système linéaire associé à (3). On termine en utilisant les résultats théoriques établis au Théorème 5.3 de [10]. □

Remarque 1. Si $f = 0$ et g satisfait (4), (6), (9) ainsi que

$$g(x)\cdot x \geqslant c_0|x|^{p+1}, \quad \left|g(x)\right| \leqslant C_0|x|^q, \quad \forall |x| \leqslant 1,$$

où $c_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $q \in]0, 1]$ et $p \geqslant q$. Alors g satisfait (10) avec $G(x) = x^{2/(r+1)}$ et $r = \frac{p+1}{q} - 1$. Si $p = q = 1$, on trouve une décroissance exponentielle, et si $p + 1 > 2q$, on obtient une décroissance polynomiale $t^{-2q/(p+1-2q)}$ (voir Exemple 5.6 de [10]). Dans ce cas on trouve des décroissances identiques à celles du Théorème 2.2 de [9] avec ici des conditions au bord de Neumann naturelles.

De même si $f = 0$ et g satisfait (4), (6), (9) ainsi que $g(x) = \exp(-1/|x|^{2r})|x|^{2r}x$ pour $|x|$ suffisamment petit et un certain $r > 0$. Alors on obtient la décroissance logarithmique $1/|\log t|^{1/r}$ (à comparer avec l'Exemple 2.11 de [9]).

Remarque 2. On obtient les mêmes résultats avec des coefficients $a_{ijkl} \in W^{2,\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ et vérifiant des hypothèses appropriées.

Références

[1] F. Alabau, V. Komornik, Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems, SIAM J. Contr. Optim. 37 (1999) 521–542.

[2] R. Bey, A. Heminna, J.-P. Lohéac, Boundary stabilization of a linear elastodynamic system with variables coefficients, E.J.D.E. 78 (2001) 1–23.

[3] R. Brossard, J.-P. Lohéac, Stabilisation frontière du système élastodynamique dans un polygone plan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 213–218.

[4] M.A. Horn, Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity, J. Math. Anal. Appl. 223 (1998) 126–150.

[5] V. Komornik, Exact Controllability and Stabilisation, The Multiplier Method, RMA, Masson, 1994.

[6] J.E. Lagnese, Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, SIAM J. Contr. Optim. 21 (1983) 968–984.

[7] W.J. Liu, Partial exact controllability and exponential stability in higher-dimensional linear thermoelasticity, ESAIM COCV 3 (1998) 23–48.

[8] G. Lebeau, E. Zuazua, Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 148 (1999) 179–231.

[9] W.J. Liu, E. Zuazua, Uniform Stabilization of the higher dimentional System of thermoelasticity with a nonlinear boundary feedback, Quart. Appl. Math. 59 (2001) 269–314.

[10] S. Nicaise, Stability and controllability of and abstract evolution equetion of hyperbolic type and concrete applications, Rendiconti Di Matematica, Ser. VII 23 (2003) 83–116.

[11] S. Nicaise, Stability and controllability of the electromagneto-elastic system, Portugal. Math. 60 (2003) 37–70.