Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 543–548
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe

Prolongement d'un courant négatif plurisousharmonique avec condition sur les tranches

Moncef Toujani [a], Hèdi Ben Messaoud [b]

[a] *Faculté des sciences de Monastir, département de mathématiques, 5019 Monastir, Tunisie*
[b] *Faculté des sciences de Sfax, département de mathématiques, route Soukra, 3018 Sfax, Tunisie*

Reçu le 13 juillet 2004 ; accepté le 23 juillet 2004

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Dans cette Note, nous montrons un théorème sur l'extension d'un courant T négatif (ou positif) psh (i.e. tel que $dd^cT \geqslant 0$) avec condition sur les tranches relatives à certaines coordonnées. Ce théorème généralise le théorème d'extension pour un courant positif d-fermé avec condition sur les tranches, dû à El Mir–Ben Messaoud. Pour cela, nous démontrons une inégalité de type Chern–Levine–Nirenberg pour un courant positif (ou négatif) psh, qui généralise des inégalitées obtenues par Bedford–Taylor, Demailly et Sibony dans le cas de courants positifs fermés. Nous démontrons enfin une inégalité de type Oka pour un courant positif psh, généralisant ainsi un résultat antérieur de Ben Messaoud–El Mir pour des courant positifs ayant un dd^c négatif. ***Pour citer cet article : M. Toujani, H. Ben Messaoud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Extension of negative plurisubharmonic current with condition on the slices. In this Note, we prove a theorem on the extension of a negative (or positive) plurisubharmonic current T (i.e. such that $dd^cT \geqslant 0$) with condition on the slices with respect to some coordinates. This theorem generalizes a result proved by El Mir–Ben Messaoud relative to d-closed positive currents with a condition on slices. The method consists first of proving a Chern–Levine–Nirenberg inequality for a positive (or negative) psh current, which is a generalization of results obtained by Bedford–Taylor, Demailly and Sibony for d-closed positive currents. Also we prove an Oka type inequality for positive psh currents, thereby generalizing former results by Ben Messaoud–El Mir concerning positive currents with a negative dd^c. ***To cite this article: M. Toujani, H. Ben Messaoud, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Adresses e-mail : moncef_toujani@yahoo.fr (M. Toujani), Hedi_Benmessaoud@yahoo.fr (H.B. Ben Messaoud).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.07.021

Abridged English version

We first prove the following theorem generalizing the Chern–Levine–Nirenberg inequality [5] to a positive (or negative) non necessarily closed current.

Theorem 0.1. *Let T be a positive psh current of bidimension (p, p) on an open set Ω_1 of $\mathcal{C}^n$ such that $1 \leqslant p \leqslant n$, and let $v_1, \ldots, v_q$ be psh C^2 functions on Ω_1 such that $1 \leqslant q \leqslant p$. Let K, L be two compact subsets of Ω_1 such that $K \subset \mathring{L}$. Then there exists a positive constant $C_{K,L}$ independent of T and v_j such that $\|T \wedge dd^c v_1 \wedge \cdots \wedge dd^c v_q\|_K \leqslant C_{K,L} \|T\|_L \prod_{j=1}^q \|v_j\|_{\infty(L)}$ where $\infty(L)$ means sup norm on L.*

The following is an Oka type inequality for a positive psh current. The case of a positive current T with $dd^c T \leqslant 0$ was proved by Ben Messaoud–El Mir [2].

Proposition 0.2. *Let T be a positive psh current of bidimension (p, p) on an open set $O \subset \mathcal{C}^n$ such that $1 \leqslant p \leqslant n$; let v be a psh C^2 function, $v \geqslant -1$ on O such that $O' = \{z \in O,\ v(z) < 0\} \subset\subset O$. Let K be a compact subset of O such that $K \subset O'$. Consider $c_K = -\sup_{z \in K} v(z)$, s an integer $1 \leqslant s \leqslant p$ and u a psh C^2 function on O' with $-1 \leqslant u < 0$. We have $\int_K T \wedge (dd^c u)^p \leqslant c_K^{-s} \int_{O'} T \wedge (dd^c v)^s \wedge (dd^c u)^{p-s} + c_{K,\overline{O'}} \|dd^c T\|_{\overline{O'}} \|v\|^s_{\infty(\overline{O'})}$ where $c_{K,\overline{O'}}$ is a positive constant which depends only on K and O'.*

Our main theorem is:

Theorem 0.3. *Let A be a closed complete pluripolar subset of the open unit polydisk Δ^n of $\mathcal{C}^n$ and T a negative psh current of bidimension (p, p) on $\Delta^n \setminus A$ such that $1 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$. Suppose that* : (i) *there exists a non pluripolar subset F of Δ^k such that for any $a \in F$, the slice $\langle T, \pi, a\rangle$ exists and is of locally finite mass in a neighborhood of every point of A*; (ii)*there exists $0 \leqslant r < 1$ such that T is of locally finite mass in a neighborhood of every point of*

$$\{z = (z', z'') \in \Delta^n;\ r < |z''|\}.$$

Then T extends to a negative psh current $\widetilde{T}$ on Δ^n, and we have $\widetilde{dd^c T} = dd^c \widetilde{T} + S$, where S is a closed negative current supported by A.

We also prove a similar theorem for positive psh currents.

1. Introduction

Nous démontrons d'abord une inégalité de type Chern–Levine–Nirenberg [5].

Théorème 1.1. *Soient T un courant positif (ou négatif) psh de bidimension (p, p) dans un ouvert Ω_1 de $\mathcal{C}^n$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n$ et $v_1, \ldots, v_q$ des fonctions psh de classe C^2 dans Ω_1 avec $1 \leqslant q \leqslant p$. Soient K et L deux compacts de Ω_1 tels que $K \subset \mathring{L}$. Alors il existe une constante $C_{K,L}$ indépendante de T et des v_j telle que* :

$$\|T \wedge dd^c v_1 \wedge \cdots \wedge dd^c v_q\|_K \leqslant C_{K,L} \|T\|_L \prod_{j=1}^{q} \|v_j\|_{\infty(L)} \tag{1}$$

où $\infty(L)$ désigne la norme du sup sur L.

Ce théorème généralise l'inégalité de [5] pour un courant positif non nécessairement fermé.

Remarque 1.

- (1) améliore une inégalité de Sibony [11] où la quantité $\|dT\|_L$, supposée finie, intervient dans le second membre.

- Il semble que le cas où les fonctions v_i sont psh localement bornées soit encore ouvert.
- L'inégalité (1) pour un courant positif fermé a été démontrée par Bedford–Taylor [4] (voir aussi Demailly [6]).
- L'article [2] démontre l'inégalité (1) pour le potentiel U d'un courant positif fermé.

2. Preuve du Théorème 1.1 et enoncé du théorème principal

On se place dans un ouvert strictement pseudo-convexe $\Omega = \{z \in \Omega_1, \rho(z) < 0\}$ dans Ω_1 tel que $K \subset \mathring{L} \subset\subset \Omega$, et où ρ est une fonction psh C^∞ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Quitte à faire une récurrence sur q, on peut supposer $q = 1$.

Premier cas : $p > 1$. On peut supposer que $-M \leqslant v \leqslant -1$ avec $M \geqslant 1$. Soient $\beta = dd^c\rho$ et $s > 0$ tel que $L \subset \Omega_s := \{\rho < -s\}$. Soient $N_2(|\cdot|)$ un noyau régularisant sur $\mathbb{R}^2$, $\max : (x_1, x_2) \to \max(x_1, x_2)$ et $\max_\varepsilon := \max * N_{2,\varepsilon}$, avec $N_{2,\varepsilon} := \frac{1}{\varepsilon^2} N_2(\frac{\cdot}{\varepsilon})$; la fonction $\max_\varepsilon$ est convexe et séparément croissante en ses variables. Posons $w_\varepsilon = \max_\varepsilon(\frac{M}{s}\rho, v)$; w_ε est psh C^∞ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$, avec $w_\varepsilon = v$ dans Ω_s et $w_\varepsilon = \frac{M}{s}\rho$ dans $\Omega \setminus \Omega_{\frac{s}{M}}$. On a : $\int_K T \wedge dd^c v \wedge \beta^{p-1} \leqslant \int_{\Omega_s} T \wedge dd^c w_\varepsilon \wedge \beta^{p-1} \leqslant \int_{\Omega_{\frac{s}{2M}}} T \wedge dd^c w_\varepsilon \wedge \beta^{p-1}$. Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega_{\frac{s}{3M}})$, $f \leqslant 0$ et $f = \rho$ sur $\Omega_{\frac{s}{2M}}$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\frac{s}{2M}}} T \wedge dd^c w_\varepsilon \wedge \beta^{p-1} &= \int_{\Omega_{\frac{s}{2M}}} T \wedge dd^c w_\varepsilon \wedge \beta^{p-2} \wedge dd^c f \\
&= \int_{\Omega_{\frac{s}{3M}}} T \wedge dd^c w_\varepsilon \wedge \beta^{p-2} \wedge dd^c f - \frac{M}{s} \int_{\Omega_{\frac{s}{3M}} \setminus \Omega_{\frac{s}{2M}}} T \wedge \beta^{p-1} \wedge dd^c f \\
&= \int_{\Omega_{\frac{s}{3M}}} w_\varepsilon dd^c f \wedge dd^c T \wedge \beta^{p-2} - \frac{M}{s} \int_{\Omega_{\frac{s}{3M}} \setminus \Omega_{\frac{s}{2M}}} T \wedge \beta^{p-1} \wedge dd^c f \\
&\leqslant c_1 \|w_\varepsilon\|_\infty(\Omega_{\frac{s}{3M}}) \|dd^c T\|_{\Omega_{\frac{s}{3M}}} + c_2 M \|T\|_{\Omega_{\frac{s}{3M}}} \quad \text{donc} \\
\int_{\Omega_{\frac{s}{2M}}} T \wedge dd^c w_\varepsilon \wedge \beta^{p-1} &\leqslant c_{K,\Omega} \big(\|T\|_{\Omega_{\frac{s}{3M}}} + \|dd^c T\|_{\Omega_{\frac{s}{3M}}} \big) M \quad \text{or}
\end{aligned}$$

$$\|dd^c T\|_{\Omega_{\frac{s}{3M}}} \leqslant c_3 \|T\|_\Omega \quad \text{donc} \quad \int_K T \wedge dd^c v \wedge \beta^{p-1} \leqslant C_{K,\Omega} M \|T\|_\Omega \quad \text{i.e.}$$

$$\|T \wedge dd^c v\|_K \leqslant C_{K,\Omega} M \|T\|_\Omega. \tag{2}$$

Quitte à couvrir le compact K par des boules $B_j \subset\subset B'_j \subset\subset L$, il suffit de démontrer (1) pour deux boules concentriques. Or dans ce cas, (1) n'est autre que (2) où v est remplacée par $(v/\|v\|_{\infty(L)}) - 2$ qui est à valeurs dans $[-3, -1]$, et on prend $M = 3$.

Deuxième cas : $p = 1$. On se place dans $\Omega_1 \times \mathcal{C}$. Soit π_1 la projection de $\Omega_1 \times \mathcal{C}$ sur Ω_1 ; alors le courant $\pi_1^*(T)$ est un courant de dimension 2, on applique (1) pour ce courant et la fonction $\tilde{v} = v \circ \pi_1$ qui est psh C^2 dans $\Omega_1 \times \mathcal{C}$. On remplace le compact K par $K \times \{|t| \leqslant 1\}$ et Ω par un ouvert strictement pseudoconvexe à bord lisse $\subset \Omega \times \{|t| \leqslant r_0\}$ et contenant $K \times \{|t| \leqslant 1\}$, avec $r_0 > 1$ fixé. Par Fubini, on a encore (1). □

On a l'inégalité de type Oka suivante :

Proposition 2.1. *Soit T un courant positif psh (i.e. $dd^c T \geqslant 0$) de bidimension (p, p) dans un ouvert $O \subset \mathcal{C}^n$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, et soit v une fonction psh de classe C^2, $v \geqslant -1$ dans O, telle que $O' = \{z \in O,\ v(z) < 0\}$ soit relativement compact dans O.*

Soit $K \subset O'$ un compact et soit $c_K = -\sup_{z\in K} v(z)$; alors pour tout entier $1 \leqslant s \leqslant p$ et toute fonction u psh C^2 dans O' vérifiant $-1 \leqslant u < 0$ on a

$$\int_K T \wedge (dd^c u)^p \leqslant c_K^{-s} \int_{O'} T \wedge (dd^c v)^s \wedge (dd^c u)^{p-s} + c_{K,\overline{O'}} \|dd^c T\|_{\overline{O'}} \|v\|^s_{\infty(\overline{O'})}$$

où $c_{K,\overline{O'}}$ une constante positive ne dépendant que de K et de O'.

Pour la suite, nous aurons besoin des notations suivantes : soient Δ^n le polydisque unité de $\mathcal{C}^n$ et T un courant de bidimension (p,p) sur $\Delta^n = \Delta^k \times \Delta^{n-k}$ avec $1 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$. Pour $z \in \Delta^n$, on notera $z = (z', z'')$ avec $z' := (z_1, \ldots, z_k)$ et $z'' := (z_{k+1}, \ldots, z_n)$. Soit $\pi : \Delta^n \to \Delta^k$, $\pi(z) = z'$. Soit $\alpha_1 \geqslant 0$ une fonction borélienne à support compact dans la boule unité de $\mathcal{C}^k$ telle que $\int_{\mathcal{C}^k} \alpha_1 \,\mathrm{d}\lambda_k = 1$; on appelle tranche de T en $a \in \Delta^k$ et on note $\langle T, \pi, a\rangle$, la limite faible, quand elle existe, de $T \wedge \pi^*(\frac{1}{\varepsilon^{2k}} \alpha_1(\frac{z'-a}{\varepsilon}) \frac{1}{4^k k!} (dd^c |z'|^2)^k)$ quand ε tend vers 0. Soient $\alpha_2 \in \mathcal{D}(\Delta^{n-k})$ une fonction positive telle que $\int_{\mathcal{C}^{n-k}} \alpha_2 \,\mathrm{d}\lambda_{n-k} = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\alpha_{1,\varepsilon}(z') = \frac{1}{\varepsilon^{2k}} \alpha_1(\frac{z'}{\varepsilon})$, $\alpha_{2,\varepsilon}(z'') = \frac{1}{\varepsilon^{2(n-k)}} \alpha_2(\frac{z''}{\varepsilon})$ et $\alpha_\varepsilon(z) = \alpha_{1,\varepsilon}(z') \alpha_{2,\varepsilon}(z'')$ et on note $T_\varepsilon = T * \alpha_\varepsilon$.

On est maintenant en mesure de prouver le théorème principal

Théorème 2.2. *Soit A un ensemble fermé pluripolaire complet du polydisque Δ^n et T un courant négatif psh de bidimension (p,p) dans $\Delta^n \setminus A$. Supposons que* : (a) *Il existe $0 \leqslant r < 1$ tel que T soit de masse localement finie au voisinage des points de* $\{z \in \Delta^n,\ r < |z''|\}$. (b) *Il existe un ensemble non pluripolaire $F \subset \Delta^k$ tel que pour tout $a \in F$, la tranche $\langle T, \pi, a\rangle$ existe sur $\Delta^n \setminus A$, et soit de masse finie au voisinage des points de A.*

Alors l'extension triviale $\widetilde{T}$ de T par zéro au dessus de A existe et c'est un courant négatif psh. De plus on a $\widetilde{dd^c T} = dd^c \widetilde{T} + S$ où S est un courant négatif fermé porté par A.

Dans [2], on trouve un théorème analogue pour un courant positif fermé. Le lemme suivant est dû à [3] (Proposition 3.3).

Lemme 2.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(\Delta^n)$ un courant positif avec $p \geqslant k$ et soit $a \in \Delta^k$. Si $\langle T, \pi, a\rangle$ existe, alors la limite faible* $\lim_{\varepsilon\to 0} \langle T_\varepsilon, \pi, a\rangle$ *existe et vaut $\langle T, \pi, a\rangle$.*

3. Preuve du Théorème 2.2

On adapte les techniques de [2] au cas d'un courant négatif psh T pour lequel on ne sait pas définir $dd^c v \wedge T$ quand v est psh localement bornée. Pour cela, nous utilisons le Lemme 2 qui est une conséquence du théorème bien connu d'Egorov. Soit $B := \{a \in \Delta^k,\ \langle T, \pi, a\rangle \text{ existe}\} \supset F$. Pour $x \in\,]r, 1[$, soit $F_x = F \cap x\Delta^k$. Comme une réunion dénombrable d'ensembles pluripolaires est pluripolaire, il existe $t \in\,]r, 1[$ tel que F_t est non pluripolaire. Soient $1 > r_0 > r_1 > t$; d'après [12] il existe une fonction f psh négative dans $r_1\Delta^n$, de classe C^∞ sur $r_1\Delta^n \setminus A$ telle que $r_1\Delta^n \cap A = \{z \in r_1\Delta^n,\ f(z) = -\infty\}$. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, soit $\psi_j \in \mathcal{D}((r_0\Delta^n) \setminus A)$ positive et $\psi_j \equiv 1$ au voisinage de $\overline{r_1\Delta^n \cap \{f > -2j\}}$ et telle que $(\psi_j)_j$ croît vers la fonction caractéristique de $(r_0\Delta^n) \setminus A$. Posons $\beta = dd^c|z|^2$, $f_j(z') = \langle T, \pi, z'\rangle(\psi_j \beta^{p-k})$ et $f_{\varepsilon,j}(z') = \langle T_\varepsilon, \pi, z'\rangle(\psi_j \beta^{p-k})$.

Soit $(\varepsilon(m))_m$ une suite de $]0,1]^2$ et $\lim_{m\to+\infty} \varepsilon(m) = (0,0)$.

Lemme 3.1. *Avec les hypothèses du théorème précédent, il existe un compact $K \subset r_0\Delta^k$ non pluripolaire et $M \in \mathbb{N}^*$ tels que* : (a) *Pour tout $z' \in K$, $|f_j(z')| < M$, $\|\langle T, \pi, z'\rangle\| < M$.* (b) *Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la suite $f_{\varepsilon(m),j}$ converge uniformément sur K vers f_j.*

Fin de la preuve du Théorème 2.2. Par la formule de tranchage de [2] ou de Federer [10] on a

$$\int_{(r_0\Delta^n)\cap\{f>-3j\}} T_{\varepsilon(m)}\wedge(dd^cu_K^*)^k\wedge\psi_j\beta^{p-k}=\int_K\langle T_{\varepsilon(m)},\pi,z\rangle(\psi_j\beta^{p-k})\,\mathrm{d}\mu_K$$
$$:=\int_K f_{\varepsilon(m),j}(z)\,\mathrm{d}\mu_K:=u_{\varepsilon(m),j}\to\int_K f_j(z)\,\mathrm{d}\mu_K\leqslant M\mu_K(K)\ \text{d'après l'hypothèse (b).}$$

Soit $M_1>M\mu_K(K)$; il existe $m_j>0$ tel que $\forall m\geqslant m_j$, on a $|u_{\varepsilon(m),j}|\leqslant M_1$ i.e. $\int_{r_0\Delta^n\cap\{f>-3j\}}-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cu_K^*)^k\wedge\psi_j\beta^{p-k}\leqslant M_1$ et donc $\int_{r_1\Delta^n\cap\{f>-2j\}}-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cu_K^*)^k\wedge\beta^{p-k}\leqslant M_1$. Quitte à considérer $T_{\varepsilon(m_j)}\wedge\beta^{p-k}$, on peut supposer $p=k$. D'autre part pour $a<b$ deux réels dans $]r,r_1[$, la fonction $v(z):=\max(u_K^*(z),\frac{1}{b^2-a^2}(|z''|^2-b^2))$ vérifie $-1\leqslant v<0$ dans $b\Delta^n$ et $v=u_K^*$ sur $\{|z''|\leqslant a\}$ d'où :

$$\int_{b\Delta^n\cap\{f>-2j\}}-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cv)^k$$
$$=\underbrace{\int_{b\Delta^k\times\{|z''|<a\}\cap\{f>-2j\}}-T_\varepsilon(m_j)\wedge(dd^cu_K^*)^k}_{I}+\underbrace{\int_{b\Delta^k\times\{a\leqslant|z''|<b\}\cap\{f>-2j\}}-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cv)^k}_{J}.$$

On a $I\leqslant M_1$ et par l'hypothèse (a) on a $J\leqslant M'$ avec $M'>0$ constante ; donc $\int_{b\Delta^n\cap\{f>-2j\}}-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cv)^k\leqslant M_1+M'=M_0$. Soit $K_j=\overline{b\Delta^n\cap\{f>-j\}}$. D'après la Proposition (2-2) de [2] on a $\int_{b\Delta^n\cap\{f>-j\}}-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cu)^k\leqslant C_{K_j}^{-s}\int_{\{f>-2j\}\cap b\Delta^n}-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cv)^k\leqslant M_0$ car $C_{K_j}=-\sup_{K_j}v\leqslant 1$. Pour finir la démonstration, on utilise le lemme élémentaire suivant (cf. par exemple [7]).

Lemme 3.2. *Soit (h_m) une suite de fonctions semi-continues supérieurement sur un ouvert $\Omega\subset\mathcal{C}^n$ décroissante vers une fonction h. Soit $(\mu_m)_m$ une suite de mesures positives qui converge faiblement vers une mesure μ sur Ω. Alors toute valeur d'adhérence faible ν de la suite $(h_m\mu_m)$ vérifie :* $\nu\leqslant h\mu$.

Suite de la preuve du Théorème 2.2. On a $(\mu_j=-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cu)^k)_j$ est une suite de mesures positives, qui converge faiblement vers la mesure positive $\mu=-T\wedge(dd^cu)^k$ et $(h_j=1_{b\Delta^n\cap\{f>-3j\}})_j$ est une suite de fonctions sci et $h_j\nearrow h=1_{b\Delta^n\setminus A}$; donc d'après le Lemme 3.2 on a

$$\int_{b\Delta^n\setminus A}-T\wedge(dd^cu)^k\leqslant\liminf_{j\to+\infty}\int_{b\Delta^n\cap\{f>-3j\}}-T_{\varepsilon(m_j)}\wedge(dd^cu)^k\leqslant M_0'.\qquad(*)$$

Soit $G\subset\subset\Delta^n$; quitte à travailler avec $r'>r_0$, on peut supposer que $G\subset r_0\Delta^n$. On applique alors $(*)$ avec $u(z)=|z|^2-1$, on aura $\int_{G\setminus A}-T\wedge(dd^c|z|^2)^p<+\infty$; donc T est de masse localement finie et $\widetilde{T}$ existe. Ceci implique d'après [9] que $\widetilde{dd^cT}$ existe et on a $\widetilde{dd^cT}=dd^c\widetilde{T}+S$, avec S un courant négatif fermé porté par A. Par conséquent $\widetilde{T}$ est un courant négatif psh. □

Théorème 3.3. *Soient A un ensemble fermé pluripolaire complet de Δ^n et T un courant positif psh de bidimension (p,p) dans $\Delta^n\setminus A$ avec $p\geqslant k+1$; supposons que :* (a) *Il existe $0\leqslant r<1$ tel que T et dd^cT soient de masse localement finie au voisinage des points de $\{z\in\Delta^n,\ r<|z''|\}$.* (b) *Il existe un ensemble non pluripolaire $F\subset\Delta^k$ tel que pour tout $a\in F$, les tranches $\langle T,\pi,a\rangle$ et $\langle dd^cT,\pi,a\rangle$ existent sur $\Delta^n\setminus A$, et soient de masse finie au voisinage des points de A.*

Alors l'extension triviale $\widetilde{T}$ de T par zéro au dessus de A existe et c'est un courant positif ; de plus on a $\widetilde{dd^cT} = dd^c\widetilde{T} + S$, où S est un courant positif fermé porté par A.

4. Preuve du Théorème 3.3

D'après [2], l'extension triviale $\widetilde{dd^cT}$ du courant dd^cT existe et c'est un courant positif fermé dans Δ^n. Soit U le potentiel local associé au courant $\widetilde{dd^cT}$ dans Δ^n ; posons $Z = U - T$, alors Z est un courant négatif psh en dehors de A et on a : $\langle Z, \pi, a\rangle = \langle U, \pi, a\rangle - \langle T, \pi, a\rangle$. D'après [1], $\langle U, \pi, a\rangle$ existe sauf sur un pluripolaire de Δ^k donc Z vérifie les conditions du Théorème 2.2 d'où $\widetilde{Z}$ existe et donc $\widetilde{T}$ existe et il est positif ; de plus d'après [9], il existe un courant S positif fermé, porté par A, tel que $\widetilde{dd^cT} = dd^c\widetilde{T} + S$. $\square$

Comme application, nous obtenons le théorème suivant démontré par [8].

Théorème 4.1. *Soient $0 < r < 1$, A un ensemble fermé pluripolaire complet de Δ^n et v une fonction psh dans $(\Delta^n \setminus A) \cup \{z \in \Delta^n,\ |z''| > r\}$, telle qu'il existe un ensemble non pluripolaire $F \subset \Delta^k$ tel que pour tout $a \in F$, la fonction $v(a, \cdot)$ se prolonge en fonction psh sur Δ^{n-k} alors v se prolonge en fonction psh dans Δ^n.*

Remerciements

Nous remercions les professeurs H. El Mir et J.-P. Demailly pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer cette Note.

Références

[1] H. Ben Messaoud, H. El Mir, Tranches et prolongement des courants positifs fermés, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 316 (1993) 1173–1176.
[2] H. Ben Messaoud, H. El Mir, Tranchage et prolongement des courants positifs fermés, Math. Ann. 307 (1997) 473–487.
[3] H. Ben Messaoud, H. El Mir, Opérateur de Monge–Ampère et tranchage des courants positifs fermés, J. Geom. Anal. 10 (1) (2000) 139–168.
[4] E. Bedford, B.-A. Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math. 149 (1982) 1–41.
[5] S.S. Chern, H.I. Levine, L. Nirenberg, Intrinstic norms on a complex manifolds, in: Global Analysis, University of Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 119–139.
[6] J.-P. Demailly, Potential theory in several complex variables, cours école d'été C.I.M.P.A, Nice, juillet 1989.
[7] J.-P. Demailly, Monge–Ampère operator, Lelong numbers and intersection, in: V. Ancona, A. Silva (Eds.), Theory, Complex Analysis and Geometry, CIRM, Univ. de Trento, 1991.
[8] H. El Mir, M. Amamou, Sur le prolongement des courants positifs fermés avec conditions sur les tranches, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 315 (1992) 777–780.
[9] H. El Mir, K. Dabbek, F. Elkhadhra, Extension of plurisubharmonic currents, Math. Z. 245 (3) (2003) 455–481.
[10] H. Federer, Geometric Mesure Theory, Springer, Berlin, New York, 1969.
[11] N. Sibony, Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe, Duke Math. J. 52 (1985) 157–197.
[12] A. Zeriahi, Ensembles pluripolaires exceptionnels pour la croissance partielle des fonctions holomorphes, Ann. Polon. Math. 50 (1989) 81–91.