Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 529–532
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres/Analyse mathématique

Applications aux sommes elliptiques d'Apostol–Dedekind–Zagier

Abdelmejid Bayad

Université d'Evry Val d'Essonne, département de mathématiques, boulevard F. Mitterrand, 91025 Evry, France

Reçu le 27 novembre 2003 ; accepté après révision le 12 juillet 2004

Disponible sur Internet le 25 septembre 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Dans cette Note, nous donnons deux applications aux sommes multiples elliptiques d'Apostol–Dedekind–Zagier dj étudiées [Bayad, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) ; DOI : 10.1016/j.crma.2004.07.018]. Ces sommes sont définies à partir de certaines formes de Jacobi de deux variables $D_\tau(z;\varphi)$, où τ est dans le demi-plan de Poincaré. Pour φ fixé et $\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$, ces sommes elliptiques redonnent les sommes multiples classiques de Dedekind étudiées par Zagier [Math. Ann. 202 (1973) 149–172], ainsi que les sommes d'Apostol [Duke Math. J. 17 (1950) 147–157 ; Pacific. J. Math. 2 (1952) 1–9]. Nous explicitons une loi de réciprocité à la Dedekind satisfaite par ces sommes classiques. ***Pour citer cet article : A. Bayad, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Applications to elliptic Apostol–Dedekind–Zagier sums. In this Note, we give two applications to our work [Bayad, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004); DOI: 10.1016/j.crma.2004.07.018] concerning multiple **elliptic** Apostol–Dedekind–Zagier sums. These elliptic sums are defined by means of certain Jacobi modular forms of two variables $D_\tau(z;\varphi)$. When $\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$, these elliptic sums give the classical Apostol–Dedekind–Zagier multiple sums [Apostol, Duke Math. J. 17 (1950) 147–157, Pacific. J. Math 2 (1952) 1–9; Zagier, Math. Ann, 202 (1973) 149–172]. We give a reciprocity law for these sums. ***To cite this article: A. Bayad, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Dans ce qui suit, les notations sont les mêmes que dans [3].

1. Etude des formes de Jacobi $D_\tau(z;\varphi)$: cas où $\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$

Soient $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur et $\tau\in\mathcal{H}$. On considère alors le réseau complexe $L=\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$. Suivant [3], la forme de Jacobi associée au réseau L, notée $D_\tau(z;\varphi)$, est définie par la fonction de Klein $\mathcal{K}_L(z)$

$$D_\tau(z;\varphi)=\mathrm{e}\big(E_L(z,\varphi)/2\big)\frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)}\ ;\quad \mathcal{K}_L(z)=z\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}zz^*}\prod_{\ell\in L,\ \ell\neq 0}\left(1-\frac{z}{\ell}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{\ell}+\frac{1}{2}(\frac{z}{\ell})^2},$$

Adresse e-mail : abayad@maths.univ-evry.fr (A. Bayad).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.07.019

où, écrivant $z = z_1\tau + z_2$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, on note $z^* = z_1\eta_1 + z_2\eta_2$ et $\eta_1 = \eta(\tau, L)$ et $\eta_2 = \eta(1, L)$ les périodes de « deuxième espèce » associées aux périodes de « première espèce » τ et 1.

La fonction D_τ est méromorphe par rapport à la première variable, mais elle perd son analyticité vis-à-vis de la seconde variable ; en contrepartie elle vérifie plusieurs propriétés intéressantes confère [3].

De plus, lorsque $\mathrm{Im}(\tau) \to \infty$, on obtient

(i) Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash L$. On a alors,

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} D_\tau(z,\varphi) = \begin{cases} \pi(\cot(\pi\{\varphi\}) + \cot(\pi\{z\}))\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi[z_1]\{\varphi_2\}} & \text{si } (z_1,\varphi_1) \in \mathbb{Z}^2, \\ \pi(\cot(\pi\{\varphi\}) - \mathrm{i})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi[z_1]\{\varphi_2\}} & \text{si } \varphi_1 \in \mathbb{Z}, z_1 \notin \mathbb{Z}, \\ \pi(\cot(\pi\{z\}) - \mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\{\varphi_1\}z_2 - 2\mathrm{i}\pi[z_1]\{\varphi_2\}} & \text{si } z_1 \in \mathbb{Z}, \varphi_1 \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } z_1 \notin \mathbb{Z}, \varphi_1 \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

où l'on a posé $\{z\} = \{z_1\}\tau + \{z_2\}$ et $[z] = [z_1]\tau + [z_2]$, où $\{z_1\}$, $\{z_2\}$ sont les parties fractionnaires de z_1, z_2 (resp. $[z_1]$, $[z_2]$ sont les parties entières de z_1, z_2) habituelles car $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} d_j(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{B_{2l}}{(2l)!}(2\pi\mathrm{i})^{2l} = -2\zeta(2l) & \text{si } j = 2l,\ l \geqslant 0, \\ \pi\cot(\pi\varphi) & \text{si } j = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Pour tout $\varphi = \varphi_1\tau + \varphi_2 \in \mathbb{C}$ avec $\varphi_1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a :

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} d_j(\varphi) = \frac{B_j(\{\varphi_1\})}{j!}(2\pi\mathrm{i})^j$$

où $B_j(X)$ est le j-ième polynôme de Bernoulli.

Le (i) se déduit de [3] **1.** (d), (ii) et (iii) se déduisent du développement de Laurent de la cotangente. Rappelons la définition des sommes elliptiques multiples d'Apostol–Dedekind–Zagier [3].

Définition 1.1. Pour tout p élément non nul de $O_L\backslash O_L^\times$ et tous entiers naturels m, k, on définit

(i) la somme elliptique de Dedekind $d(p; a_1, \dots, a_n; m, \varphi, z, \tau)$ paramétrée par les complexes φ, z :

$$d(p; a_1, \dots, a_n; m, \varphi, z, \tau) = \frac{1}{p}\sum_{w\in L/pL\backslash\{0\}} e\big(E_L(w,\varphi)\big)D_\tau\left(z + \frac{w}{p};\varphi\right)^m \prod_{k=1}^n D_\tau\left(a_k\frac{w}{p};\varphi\right).$$

(ii) la somme elliptique multiple d'Apostol–Dedekind–Zagier paramétrée par φ

$$S_k(p; a_1, \dots, a_n; m, \varphi, \tau) = \frac{1}{p}\sum_{w\in L/pL\backslash\{0\}} e\big(E_L(w,\varphi)\big)\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left\{D_\tau\left(z + \frac{w}{p};\varphi\right)^m\right\}_{|z=0} \prod_{j=1}^n D_\tau\left(a_j\frac{w}{p};\varphi\right).$$

2. Application 1 : Sommes multiples de Dedekind–Zagier à paramètre

Dans cette Section, on se donne $a_0, \dots, a_n$ entiers naturels deux à deux premiers entre eux et > 1. Nous nous intéressons ici aux sommes suivantes, à paramètres $\varphi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, qui généralisent celles étudiées par Zagier [5] (correspondant à $\varphi = \frac{1}{2}$)

$$d(a_l; a_0, \dots, \check{a}_l, \dots, a_n; m, \varphi) = \frac{1}{a_l}\sum_{k=1}^{a_l-1}\left(\cot\left(\frac{\pi k}{a_l}\right) + \cot(\pi\varphi)\right)^m \prod_{0\leqslant j\neq l\leqslant n}\left(\cot\left(\frac{\pi k a_j}{a_l}\right) + \cot(\pi\varphi)\right).$$

La méthode qu'on a utilisé pour montrer le Théorème 2.1 [3] permet de donner une version plus générale au résultat de Zagier [5], en faisant tendre $\mathrm{Im}(\tau) \to \infty$. D'une manière précise, on obtient

Théorème 2.1. *Soient $m \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$ divisant $a_0 + \cdots + a_n + m$. Alors pour tout $\varphi = \frac{k}{d}$, $1 \leqslant k \leqslant d-1$, on a*

$$\sum_{l=0}^{n} d(a_l; a_0, \ldots, \check{a}_l, \ldots, a_n; m, \varphi) = \frac{\sin(\pi\varphi(n+m+1))}{\sin(\pi\varphi)^{m+n+1}} - \mathrm{i}^{n+m} \frac{l_{n+m}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{m \text{ fois}}, a_0, \ldots, a_n; \varphi)}{a_0 \cdots a_n},$$

où l' on a posé

$$\frac{l_{n+m}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{m \text{ fois}}, a_0, \ldots, a_n; \varphi = k/d)}{a_0 \cdots a_n} = (-\mathrm{i})^{n+m} \operatorname{Res}\Bigl(\bigl(\cot(z) + \cot(\pi\varphi)\bigr)^m \prod_{j=0}^{n} \cot(a_j z) + \cot(\pi\varphi)\Bigr)_{|z=0}.$$

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du Théorème 2.1 [3], en introduisant la fonction

$$x \to f(x,\varphi) = \bigl(\cot(z) + \cot(\pi\varphi)\bigr)^m \prod_{j=0}^{n} \cot(a_j z) + \cot(\pi\varphi)$$

qui est la limite de la fonction, introduite pour prouver le Théorème 2.1 [3],

$$x \to F(x,\varphi) = D_L(x;\varphi)^m \prod_{k=0}^{n} D_L(a_k x; \varphi),$$

quand $\mathrm{Im}(\tau) \to \infty$, $x, \varphi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Puis, on applique le théorème des résidus à la fonction $x \mapsto f(x,\varphi)$.

Remarque 1. Dans [4], on sait que $l_n(a_0, \ldots, a_n, \varphi = \frac{1}{2}) = L_k(p_1, \ldots, p_k)$, $k = \frac{n}{2}$ où p_i, $i = 1, \ldots, k$, est le i-ème polynôme élémentaire symétrique en $a_0, \ldots, a_n$ et L_k le polynôme de Hirzebruch connu par les topologistes.

3. Application 2 : Sommes d'Apostol

On applique le Théorème 3.2 [3], pour $n = 1$ et $m = 1$ ou 2. On obtient le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Soient a_0, a_1 éléments non nuls de $O_L \backslash O_L^{\times}$. Alors, pour tout φ paramètre de point de 2-division non nul de $\mathbb{C}/L$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

(i) *Si $a_0 + a_1 \equiv 1 \pmod{2O_L}$, alors $S_k(a_0, a_1; 1, \varphi, \tau) + S_k(a_1, a_0; 1, \varphi, \tau)$ est égale à*

$$\begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair}, \\ -\dfrac{1}{a_0 a_1}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{l+1} d_{2i}(\varphi) d_{2l+2-2i}(\varphi) a_0^{2i} a_1^{2l+2-2i} + (2l+1) d_{2l+2}(\varphi)\right) & \text{si } k = 2l. \end{cases}$$

(ii) *Si $a_0 + a_1 \equiv 0 \pmod{2O_L}$, alors $S_k(a_0, a_1; 2, \varphi, \tau) + S_k(a_1, a_0; 2, \varphi, \tau)$ est égale à*

$$\begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair}, \\ -\dfrac{2l}{a_0 a_1}\left((2l+1) G_{2l+2}(L) - \displaystyle\sum_{i=0}^{l+1} d_{2i}(\varphi) d_{2l+2-2i}(\varphi) a_0^{2i} a_1^{2l+2-2i}\right) & \text{si } k = 2l-1. \end{cases}$$

En particulier si $\varphi = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{Im}(\tau) \to \infty$ on déduit de ce théorème et des propriétés (i)–(iii) de la Section 1, un résultat connu sur les sommes d'Apostol [1], p. 149, [2], p. 6. Plus precisément, on obtient

Corollaire 3.2 (Apostol revisité). *Pour a_0, a_1 entiers naturels premiers entre eux et > 1, on a*

$$s_k(a_0,a_1) + s_k(a_1,a_0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^l 4^{l+1}}{a_0 a_1}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{l+1} \frac{B_{2i}}{(2i)!}\frac{B_{2l+2-2i}}{(2l+2-2i)!} a_0^{2i} a_1^{2l+2-2i} + (2l+1)\frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!}\right) & \textit{si } k = 2l, \\ 0 & \textit{si } k \textit{ impair}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$s_k(a_0,a_1) = \frac{1}{k! a_0} \sum_{t=0}^{a_0-1} \cot^{(k)}\left(\frac{\pi t}{a_0}\right) \cot\left(\frac{\pi a_1 t}{a_0}\right).$$

Ceci peut être formulé d'une autre manière équivalente

Corollaire 3.3. *Pour a_0, a_1 entiers naturels premiers entre eux et > 1, on a*

$$\tilde{s}_k(a_0,a_1) + \tilde{s}_k(a_1,a_0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^l (2\pi)^{2l+1}}{a_0 a_1}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{l+1} \frac{B_{2i}}{(2i)!}\frac{B_{2l+2-2i}}{(2l+2-2i)!} a_0^{2i} a_1^{2l+2-2i} + (2l+1)\frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!}\right) & \textit{si } k = 2l, \\ 0 & \textit{si } k \textit{ impair}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\tilde{s}_k(a_0,a_1) = \frac{1}{a_0} \sum_{t=0}^{a_0-1} \zeta\left(k+1, \frac{t}{a_0}\right) \cot\left(\frac{\pi a_1 t}{a_0}\right)$$

et $\zeta(s,x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s}$ est la fonction zêta d'Hurwitz définie pour $R(s) > 1$ et $x \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Cela résulte du Corollaire 3.2, compte tenu de la formule

$$\frac{\pi^{k+1}\cot^{(k)}(\pi x)}{k!} = (-1)^k \zeta(k+1,x) - \zeta(k+1,1-x), \quad \forall x,\ |x| < 1,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Références

[1] T.M. Apostol, Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series, Duke Math. J. 17 (1950) 147–157.
[2] T.M. Apostol, Theorems on generalized Dedekind sums, Pacific J. Math. 2 (1952) 1–9.
[3] A. Bayad, Sommes elliptiques multiples d'Apostol–Dedekind–Zagier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).
[4] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer, Berlin, 1966.
[5] D. Zagier, Higher order Dedekind sums, Math. Ann. 202 (1973) 149–172.