Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 387–390
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbre homologique

Modules d'extensions des algèbres triangulaires

Belkacem Bendiffalah [1]

UMR CNRS 5149, département de mathématiques, case 051, institut I3M de l'université Montpellier II, place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

Reçu le 30 mars 2004 ; accepté après révision le 12 juillet 2004

Disponible sur Internet le 27 août 2004

Présenté par Henri Cartan

Résumé

Nous construisons une suite exacte longue, exprimant les modules d'extension d'une algèbre triangulaire en fonctions de ceux associés aux algèbres de sa diagonale, dans deux cas : soit son bimodule est un module-à-gauche projectif soit c'est un module-à-droite plat. Ceci complète un résultat de Palmér et Roos sur la dimension globale des algèbres triangulaires. ***Pour citer cet article : B. Bendiffalah, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Extensions modules for triangular algebras. We construct a long exact sequence where the extensions modules of a triangular algebra are involved with extension modules of its diagonal algebras. This holds in two cases: either its bimodule is right-projective or it is left-flat. This completes a result of Palmér and Roos about the global dimension of triangular algebras. ***To cite this article: B. Bendiffalah, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction

Soient un anneau commutatif K et deux algèbres A et B (associatives K-unitaires). Un (A, B)-bimodule M est un $A \otimes_K B^o$-module, où B^o désigne l'algèbre opposée de B. Pour simplifier, nous parlerons du bimodule M. Il détermine une nouvelle algèbre :

$$T = \begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & m \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & m' \\ 0 & b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & am' + mb' \\ 0 & bb' \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Adresse e-mail : ben@math.univ-montp2.fr (B. Bendiffalah).

[1] Travail effectué dans le cadre d'une collaboration Socratès-Erasmus, entre l'Université Montpellier II (France) et la Universidad de Murcia (Espagne).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.07.007

Le problème d'une expression de $gldim(T)$, la dimension homologique globale (à gauche) de T (problème de Chase, [2]), a été complètement résolu par Palmér et Roos [9,10]. Si, de plus, M est B^o-plat, ces derniers disposent d'une formule relativement simple :

$$\begin{aligned} gldim(T) &= \max\Big\{gldim\, A,\ gldim\, B,\ 1+\sup_X pdim_A(M\otimes_B X)\Big\} \\ &= \max\Big\{gldim\, A,\ gldim\, B,\ 1+\sup_{I\leqslant B} pdim_A(M/MI)\Big\} \end{aligned} \tag{2}$$

où X parcourt les B-modules, I parcourt les idéaux (à gauche) de B, et $pdim$ désigne la dimension projective ($pdim(0)=-1$). Dans [9,10], on trouve une longue suite exacte pour Ext_T^* ([10, §8. Corollaire 1]), apparentée à celle de Mayer–Vietoris, valable pour certains T-modules (le Corollaire 1 de [9] n'est assuré que pour $g=0$, cf. [10, §5. Remarque 1]). Dans cette note, nous établissons cette suite exacte longue pour une paire quelconque de T-modules si M est B^o-plat (ou A-projectif) et donnons une application au calcul de la cohomologie de certains posets (ensemble ordonné fini, cf. Section 3). Notons qu'un T-module Λ est la donnée d'un B-module X, d'un A-module Y et d'un A-morphisme $f: M\otimes_B X\longrightarrow Y$, ce que nous écrivons : $\Lambda=[f]$, $X=s(f)$ et $Y=b(f)$; nous décrirons aussi Λ par un diagramme $X\overset{f}{\Longrightarrow}Y$. Le résultat suivant implique l'identité (2).

Théorème 1.1. *Si M est B^o-plat, nous avons pour tous T-modules $X\overset{f}{\Longrightarrow}Y$ et $X'\overset{f'}{\Longrightarrow}Y'$ une suite exacte longue* :

$$\cdots\longrightarrow Ext_T^*\big([f],[f']\big)\overset{(b^*,s^*)}{\longrightarrow} Ext_A^*(Y,Y')\times Ext_B^*(X,X')\longrightarrow Ext_A^*(M\otimes_B X,Y')\longrightarrow Ext_T^{*+1}\big([f],[f']\big)\longrightarrow\cdots.$$

Les morphismes b^* et s^* sont ceux dérivés des morphismes naturels b et s.

Il convient de faire ici un parallèle avec une autre suite exacte longue : si K est un corps et chaque algèbre, A et B, a une dimension vectorielle finie et un quotient par le radical de Jacobson K-séparable, la suite exacte longue en cohomologie de Hochschild de T ([3,8], cf. aussi [1,6,7]) prouve l'identité : $gldim(T)=\max\{gldim(A), gldim(B), 1+pdim_{A\otimes_K B^o} M\}$. La preuve du Théorème 1.1 se dualise et on déduit le résultat suivant.

Théorème 1.1 *(bis). Si M est A-projectif, nous avons une suite exacte longue :*

$$\cdots\longrightarrow Ext_T^*\big([f],[f']\big)\overset{(b^*,s^*)}{\longrightarrow} Ext_A^*(Y,Y')\times Ext_B^*(X,X')\longrightarrow Ext_B^*\big(X, Hom_A(M,Y')\big)\longrightarrow\cdots. \tag{3}$$

2. Preuve du Théorème 1.1

La donnée d'un T-morphisme $\varphi:[f_1]\longrightarrow[f_2]$, est la donnée d'un B-morphisme $X_1\overset{\varphi_X}{\longrightarrow}X_2$ et d'un A-morphisme $Y_1\overset{\varphi_Y}{\longrightarrow}Y_2$, tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M\otimes_B X_1 \arrow[r, "M\otimes\varphi_X"] \arrow[d, "f_1"'] & M\otimes_B X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "\varphi_Y"] & Y_2 \end{tikzcd} \quad \text{(symbolisé par le diagramme } \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, Rightarrow, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, Rightarrow, "f_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "\varphi_Y"] & Y_2 \end{tikzcd}\text{)}$$

est commutatif. Nous noterons $\left[\begin{smallmatrix} Y\\ 0\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0\\ X\end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix} M\otimes_B X\\ X\end{smallmatrix}\right]$, les T-modules $0\Longrightarrow Y$, $X\Longrightarrow 0$ et $X\overset{1_{M\otimes_B X}}{\Longrightarrow}M\otimes_B X$.

Lemme 2.1. *Nous avons des isomorphismes* :

$$b^*: Ext_T^*\left(\begin{bmatrix} Y\\ 0\end{bmatrix},[f']\right)\cong Ext_A^*(Y,Y') \quad \textit{et} \quad s^*: Ext_T^*\left([f],\begin{bmatrix} 0\\ X'\end{bmatrix}\right)\cong Ext_B^*(X,X'). \tag{4}$$

Démonstration. Toute A-extension $0 \to Y' \xrightarrow{\varphi_n} Y_n \xrightarrow{\varphi_{n-1}} Y_{n-1} \to \cdots \to Y_1 \xrightarrow{\varphi_0} Y \longrightarrow 0$ se relève en une T-extension (ce qui fournit une section $Ext^*_A(Y, Y') \longrightarrow Ext^*_T\left(\left[\begin{smallmatrix} Y \\ 0 \end{smallmatrix}\right], [f']\right)$ à b^*) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "1"] \arrow[d, Rightarrow, "f'"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\varphi_n f'"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "0"'] & \cdots \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\|"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "\varphi_n"] & Y_n \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\varphi_1"] & Y_1 \arrow[r, "\varphi_0"] & Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Pour montrer que b^* est un isomorphisme, il reste à voir que toute T-extension

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, Rightarrow, "f'"'] & X_n \arrow[r, "\psi_{n-1}"] \arrow[d, Rightarrow, "f_n"'] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "f_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, Rightarrow, "\|"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "f_1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "\varphi_n"] & Y_n \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\varphi_1"] & Y_1 \arrow[r, "\varphi_0"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est équivalente à l'extension (5). La commutativité du diagramme ci-dessous le prouve :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & X' \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, Rightarrow, "f'"'] & & X' \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi_n"] \arrow[dd, Rightarrow, "\varphi_n f'"'] & & 0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & & \cdots \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & & 0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & & 0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & & 0 & \\
0 \arrow[rr] & & X' \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & X_n \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & X_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & \cdots \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & X_1 \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & 0 \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & Y_n \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & Y_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & \cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & Y \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & 0 & \\
0 \arrow[rr] & & Y' \arrow[rr] & & Y_n \arrow[rr] & & Y_{n-1} \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & Y_1 \arrow[rr] & & Y \arrow[rr] & & 0.
\end{tikzcd}$$

La seconde partie de (4) se démontre identiquement. □

Lemme 2.2. *Si M est plat sur B^o, nous avons un isomorphisme* :

$$Ext^*_T\left(\begin{bmatrix} M \otimes_B X \\ X \end{bmatrix}, [f']\right) \cong Ext^*_B(X, X'). \tag{6}$$

Démonstration. Avec la platitude de M, toute B-extension $0 \to X' \xrightarrow{\psi_n} X_n \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots \to X_1 \xrightarrow{\psi_0} X \to 0$ définit une A-extension $0 \to M \otimes X' \xrightarrow{1\otimes\psi_n} M \otimes X_n \xrightarrow{1\otimes\psi_{n-1}} \cdots \to M \otimes X_1 \xrightarrow{1\otimes\psi_0} M \otimes X \to 0$ $(\otimes = \otimes_B)$ et nous obtenons une T-extension en la composant avec le morphisme f' :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, Rightarrow, "f'"'] & X_n \arrow[r, "\psi_{n-1}"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{f}_n"'] & X_{n-1} \arrow[r, "\psi_{n-2}"] \arrow[d, Rightarrow, "f_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, Rightarrow, "\|"] & X_1 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, Rightarrow, "f_1"] & X \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "1_{M\otimes X}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "\tilde{\psi}_n"] & Y' \sqcup M \otimes X \arrow[r, "\tilde{\psi}_{n-1}"] & M \otimes X_{n-1} \arrow[r, "M\otimes\psi_{n-2}"] & \cdots \arrow[r, "M\otimes\psi_1"] & M \otimes X_1 \arrow[r, "M\otimes\psi_0"] & M \otimes X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{7}$$

où le carré commutatif de gauche est une somme amalgammée. Or toute T-extension

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, Rightarrow, "f'"'] & X_n \arrow[r, "\psi_{n-1}"] \arrow[d, Rightarrow, "f_n"'] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "f_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, Rightarrow, "\|"] & X_1 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, Rightarrow, "f_1"] & X \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "1_{M\otimes X}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "\varphi_n"] & Y_n \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\varphi_1"] & Y_1 \arrow[r, "\varphi_0"] & M \otimes X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est équivalente à celle (7) d'après la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & X' \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, Rightarrow] & & X_n \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, Rightarrow] & & \cdots \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, Rightarrow] & & X_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, Rightarrow] & & X \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, Rightarrow] & & 0 & \\
0 \arrow[rr] & & X' \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & X_n \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & \cdots \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & X_1 \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & X \arrow[rr] \arrow[dd, Rightarrow] & & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y' \sqcup M \otimes_B X \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & M \otimes_B X_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & M \otimes_B X \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] & & 0 & \\
0 \arrow[rr] & & Y' \arrow[rr] & & Y_n \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & Y_1 \arrow[rr] & & M \otimes_B X \arrow[rr] & & 0.
\end{tikzcd}$$

□

Le Théorème 1.1 se déduit immédiatement de ces lemmes, en considérant la suite exacte longue de Ext^*_T associée à la suite exacte courte de T-modules $0 \to \left[\begin{smallmatrix} M\otimes_B X \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \to \left[\begin{smallmatrix} M\otimes_B X \\ X \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} Y \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \to [f] \to 0$.

3. Applications aux posets

Pour un poset P, on note $K^{(P)}$ le module libre qu'il génère et $K^P = Hom(K^{(P)}, K)$ (libre aussi de base $\{x^* \mid x \in P\}$). On vérifie que le sous-module de $K^{(P)} \otimes K^P$ généré par $\{x' \otimes x^* \mid x' \geqslant x\}$, est une sous-algèbre $K[P] \subset End(K^{(P)})$, appelée l'algèbre d'incidence de P. La cohomologie de P est l'algèbre graduée $HH^*(K[P]) = H^*(K[P], K[P])$ (cohomologie de Hochschild). Tout morphisme de posets $\varphi : P \to Q$, détermine un poset $cyl(\varphi) = (Q \sqcup P, \geqslant)$ où l'on ajoute aux relations de P et Q, celles $q \geqslant p$, si $q \in Q$, $p \in P$ et $q \geqslant \varphi(p)$ (dans Q), voir Gerstenhaber et Schack [5, p. 4].

Théorème 3.1. *Nous avons un isomorphisme d'algèbres graduées* : $HH^*(K[cyl\,\varphi]) \cong HH^*(K[Q])$.

Ce résultat généralise celui de [4] sur la trivialité de la cohomologie d'un poset R n'ayant qu'un unique élément maximal (en effet : $R \cong cyl\,\varphi$, avec Q ponctuel). Notons que ce dernier, couplé avec la suite exacte longue de [1], prouve que nous avons un isomorphisme :

$$HH^*\big(K[P]\big) \cong Ext^*_{K[P]}\big(K^{(P)}, K^{(P)}\big). \tag{8}$$

Démonstration. Par construction, nous avons une structure triangulaire $K[cyl\,\varphi] \cong \left[\begin{smallmatrix} K[Q] & K[\varphi] \\ 0 & K[P] \end{smallmatrix}\right]$, pour un certain $K[Q] \otimes_K K[P]^o$-sous-module $K[\varphi] \subset Hom_K(K^{(P)}, K^{(Q)})$ et des $K[Q]$-isomorphismes : $K[\varphi] = \bigoplus_{y \geqslant \varphi(x)} Ky \otimes x^* = \bigoplus_{x\in P} K[Q]\varphi(x) \otimes x^* \cong \bigoplus_{y \in \mathrm{Im}\,\varphi} (K[Q]y \otimes y^*)^{\varphi^{-1}y}$ prouvant que $K[\varphi]$ est $K[Q]$-projectif (chaque $y \otimes y^*$ est un idempotent de $K[Q]$). Le Théorème 1.1 (bis) s'applique pour $T = K[cyl\,\varphi]$, $A = K[Q]$, $B = K[P]$, $M = K[\varphi]$. Mais, pour $[f'] = K^{(cyl\,\varphi)}$, nous avons $X' = K^{(P)}$, $Y' = K^{(Q)}$ et la suite exacte longue (3) se réduit à un isomorphisme gradué $Ext^*_{K[cyl\,\varphi]}([f], K^{(cyl\,\varphi)}\big) \cong Ext^*_{K[Q]}(Y, K^{(Q)})$, puisque $Hom_{K[Q]}(K[\varphi], K^{(Q)}) \cong \prod_{x\in P} Hom_{K[Q]}(K[Q]\varphi(x) \otimes x^*, K^{(Q)}) \cong \prod_{x\in P} \varphi(x)K^{(Q)} \cong K^{(P)}$. En particulier : pour $[f] = K^{(cyl\,\varphi)}$, $Y = K^{(Q)}$ et nous obtenons l'énoncé du Théorème 3.1 avec (8). □

Références

[1] B. Bendiffalah, D. Guin, Cohomologie de l'algèbre triangulaire et applications, Algebra Montpellier Announcements 01 (2003).
[2] S. Chase, A generalization of the ring of triangular matrix, Nagoya Math. J. 18 (1961) 13–25.
[3] C. Cibils, Tensor Hochshild Homology and Cohomology, Lectures in Pure and Applied Math., vol. 210, Dekker, New York, 2000.
[4] M.A. Gatica, M.J. Redondo, Hochschild cohomology and fundamental groups of incidence algebras, Commun. Algebra 29 (5) (2001) 2269–2283.
[5] M. Gerstenhaber, S.D. Schack, On the deformation of algebra morphisms and diagrams, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1) (1983) 1–50.
[6] E.L. Green, Ø. Solberg, Hochschild cohomology rings and triangular rings, in: Proc. of the 9th International Conference, Beijing 2000, vol. II, Beijing Normal University Press, 2002, pp. 192–200.
[7] B. Keller, Derived invariance of higher structures on the Hochschild complex, Preprint, 2003.
[8] S. Michelena, M.I. Platzeck, Hochschild cohomology of triangular matrix algebras, J. Algebra 233 (2) (2000) 502–525.
[9] I. Palmér, J.-E. Roos, Formules explicites pour la dimension homologique des anneaux de matrices généralisées, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 273 (1971) 1026–1029.
[10] I. Palmér, J.-E. Roos, Explicit formulæ for the global homological dimensions of trivial extensions of rings, J. Algebra 27 (1973) 380–413.