Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 405–410

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Contrôle optimal

# Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle

Ousseynou Nakoulima

*Université Antilles-Guyane, DMI, Campus de Fouillole, 97159 Pointe à Pitre cedex, Guadeloupe*

Reçu le 31 mars 2004 ; accepté après révision le 5 juillet 2004

Disponible sur Internet le 21 août 2004

Présenté par Alain Bensoussan

**Résumé**

On examine un problème de contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur avec des contraintes linéaires (en nombre fini) sur le contrôle. L'outil essentiel pour résoudre les problèmes d'existence et de convergence est une inégalité d'observabilité de type Carleman qui, ici, est *adaptée aux contraintes*. On applique ensuite les résultats obtenus à la théorie des sentinelles de Lions. ***Pour citer cet article : O. Nakoulima, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***


**Abstract**

**Null-controllability with constraints on the control.** We study a problem of null-controllability for the parabolic heat equation with linear constraints on the control. The main tool used to solve the problem of existence and convergence is an observability inequality of Carleman type, which is 'adapted' to the constraints. We then apply the obtained results to the sentinels theory of Lions. ***To cite this article: O. Nakoulima, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***
© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

Let $n \in \mathbf{N}^*$ and $\Omega$ be a bounded open subset of $\mathbf{R^n}$ with boundary $\Gamma$ of class $C^2$ and let $T > 0$. Let $\omega$ be an open and non empty subset of $\Omega$. We then denote by $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$, and consider the parabolic evolution equation:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} + Aq + a_0 q = h + v\chi_\omega \quad \text{in } Q, \quad q = 0 \quad \text{on } \Sigma, \quad q(T) = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

where $A$ is a differential operator defined by

$$A = -\sum_{i=1, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

*Adresse e-mail :* onakouli@univ-ag.fr (O. Nakoulima).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2004.07.005

with the coefficients $a_{i,j}, a_0$ satisfying:

$$a_{i,j} \in C^2(\overline{Q}), \quad a_0 \in L^\infty(Q), \quad a_{i,j} = a_{j,i}, \quad \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_j\xi_i \geqslant \alpha_0|\xi|^2 \quad \text{with } \alpha_0 > 0, \tag{2}$$

$h \in L^2(Q)$, and where $\chi_\omega$ denotes the characteristic function of $\omega$. Then, for all $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ the problem (1) admits a unique solution $q$ which satisfies $q \in C([0,T];\ L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\ H_0(\Omega))$.

Let now $\mathcal{K}$ be a real vector subspace of $L^2(\omega \times (0,T))$. We assume that

$$\mathcal{K} \text{ is of finite dimension.} \tag{3}$$

Denote by $\mathcal{K}^\perp$ the orthogonal of $\mathcal{K}$ in $L^2(\omega \times (0,T))$, and consider the following problem: look for a control function $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ such that

$$v \in \mathcal{K}^\perp \tag{4}$$

and that if $q = q(x,t;v)$ is the unique solution of (1), then

$$q(0) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{5}$$

with $v$ of minimal norm in $L^2(\omega \times (0,T))$, i.e.

$$\|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))} = \text{minimum}. \tag{6}$$

This is called a problem of null-controllability with the constraints on the control $v$.

**Remark 1.** The problem (1) is a backward problem, and appears under this form in the Lions' sentinels theory.

For the problem (1) and (4)–(6), we consider the following two questions. The first question is to look for an optimal control, and the second one is to characterize the optimal control by an optimality system. This is well known in the case $\mathcal{K} = \{0\}$ (i.e. case without constraints), by the study of several authors using different methods. A first method is used by Russel [7], and a second one is due to Lebeau and Robbiano [2]. A third approach is used by Fursikov and Imanuvilov [1]. We can refer also to Puel [5,6], who revisits these questions in order to clarify the presentation.

In this Note, the two questions are considered in the general case $\mathcal{K} \neq \{0\}$. We use the variational method to establish the existence of optimal control and the method of penalisation to characterize it.

The following assumption will be needed throughout the Note

$$\begin{cases} \text{there are not non null elements } k \in \mathcal{K} \text{ such that} \\ k \in L^2(0,T;\ H^1(\omega)) \text{with } \dfrac{\partial k}{\partial t} + Ak + a_0 k = 0 \quad \text{in } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{7}$$

Then, we introduce a weight function $\theta$ which will be precisely defined in the following Lemma 1.2, but which – for instance – is such that

$$h \in L^2\big(\Omega \times (0,T)\big) \quad \text{and} \quad \theta h \in L^2\big(\Omega \times (0,T)\big). \tag{8}$$

We can now formulate our main result:

**Theorem 0.1.** *Under the previous hypothesis* (2), (3) *and* (7), (8), *and for any open subset $\omega$ of $\Omega$, and $T > 0$, there exists a unique control $v$ solution of the problem* (1) *and* (4), (5), *of minimal norm in $L^2(\Omega \times (0,T))$, i.e. such that* (6) *holds.*

The main tool to prove Theorem 0.1 is an 'adapted' observability inequality to constraints. More precisely, let $L = \frac{\partial}{\partial t} + A + a_0 I$,

$$\mathcal{V} = \left\{\rho \in C^{\infty}(\overline{Q}),\ \rho = 0 \text{ on } \Sigma\right\}, \tag{9}$$

and $P =$ the orthogonal projection operator from $L^2(\omega \times (0,T))$ into $\mathcal{K}$.

We endow the space $\mathcal{V}$ with the bilinear form $a_{\theta,P}(\cdot,\cdot)$ defined by:

$$a_{\theta,P}(\rho,\hat{\rho}) = \int_0^T\!\!\int_\Omega L\rho L\hat{\rho}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\!\!\int_\omega (\rho - P\rho)(\hat{\rho} - P\hat{\rho})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Then, thanks to (7) and the following Lemma 1.2, this bilinear form is a scalar product on $\mathcal{V}$.

Let $V_{\theta,P}$ be the Hilbert space, completed of $\mathcal{V}$ for the scalar product $a_{\theta,P}(\rho,\hat{\rho})$ and the associated norm.

We give now the characterization of the optimal control by the optimality system. More precisely, the set of functions $v$ such that (1), (4)–(6) hold (admissible controls), is not empty and it is immediately seen that it is a closed convex set of $L^2(\omega \times (0,T))$. Therefore, there exits a unique $\hat{v}$ of minimal norm in $L^2(\omega \times (0,T))$. Now, let $\hat{q}$ the unique associated solution such that (1), (4)–(6) hold.

**Theorem 0.2.** *Under the assumptions of Theorem* 0.1*, the couple* $(\hat{v},\hat{q})$ *is the optimal solution of problem* (1), (4)–(6) *if only if there exists one function* $\hat{\rho}$ *such that* $(\hat{v},\hat{q},\hat{\rho})$ *is the solution of the optimal system* (16)–(18).

## 1. Introduction

On étudie dans cette Note l'existence et la caractérisation d'un contrôle optimal pour le problème (1), (4)–(6) qui est un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes linéaires sur le contrôle. Le résultat principal est le suivant :

**Théorème 1.1.** *On suppose* (2), (3), (7) *et* (8)*. Alors pour tout ouvert non vide* $\omega$ *de* $\Omega$ *et pour tout* $T > 0$*, il existe un contrôle* $v$ *solution du problème* (1), (4), (5)*. De plus, il existe un unique contrôle* $\hat{v}$ *de norme minimale dans* $L^2(\Omega \times (0,T))$*, i.e. tel que* (6) *ait lieu.*

La démonstration du Théorème 1.1 passe par plusieurs étapes qui utilisent essentiellement le lemme suivant.

**Lemme 1.2.** *On suppose* (2)*, alors il existe une fonction «poids»* $\theta$ *vérifiant* $\theta > 0$*,* $\theta$ *de classe* $C^2$ *sur* $Q$*,* $\frac{1}{\theta}$ *bornée sur* $Q$ *et il existe une constante* $C > 0$ *tel que*

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{1}{\theta^2}|\rho|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C\left(\int_0^T\!\!\int_\Omega |L\rho|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\!\!\int_\omega |\rho - P\rho|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) \quad \forall \rho \in \mathcal{V}. \tag{11}$$

La démonstration du lemme repose sur trois arguments : L'inégalité d'observabilité classique suivante :

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{1}{\theta^2}|\rho|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C\left(\int_0^T\!\!\int_\Omega |L\rho|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\!\!\int_\omega |\rho|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) \quad \forall \rho \in \mathcal{V},$$

la compacité de l'opérateur $P$ assurée ici par la dimension finie de $\mathcal{K}$ et enfin la continuité de $P$. On trouvera le détail de la démonstration dans [4].

**Remarque 1.** La relation (11) est encore vraie en incorporant dans les deux termes de droite les poids $1/\theta^2$.

Quant à la démonstration du Théorème 1.1, voici quelques indications. Le second membre de (11) induit sur l'espace $\mathcal{V}$ défini en (9) le produit scalaire (10) qui permet de construire l'espace de Hilbert $V_{\theta,P}$ complété de $\mathcal{V}$ pour la norme associée à (10). Dans ce cadre, la forme linéaire $\rho \mapsto \int_0^T \int_\Omega h\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ est continue sur $V_{\theta,P}$ et ce, grâce à (11) et à l'hyphothèse (8) sur $h$. Par suite, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence d'un unique $\rho_\theta$ dans $V_{\theta,P}$ solution du problème variationnel :

$$a_{\theta,P}(\rho_\theta,\rho) = \int_0^T \int_\Omega h\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \quad \forall \rho \in V_{\theta,P}.$$

On pose $v_\theta = -(\rho_\theta - P\rho_\theta \chi_\omega)\chi_\omega$ et $q_\theta = L\rho_\theta$. Alors le couple $(v_\theta, q_\theta)$ est une solution du problème de contrôlabilité à zéro (1), (4), (5). Ce qui établit la premiere partie du Théorème 1.1.

On peut donc parler de l'ensemble des contrôles $v$ solutions du problème de contrôlabilité (1), (4), (5). Cet ensemble est non vide. Il est convexe et fermé dans $L^2(0,T,L^2(\omega))$. Par conséquent, il existe un unique contrôle optimal $\hat{v}$ de norme minimale dans $L^2(0,T,L^2(\omega))$. Ce qui etablit la deuxième partie du Théorème 1.1 ; et donc achève sa démonstration.

On caractérise maintenant le contrôle optimal $\hat{v}$ du Théorème 1.1. Soit $\hat{q}$ l'unique élément associé à $\hat{v}$ tel que le couple $(\hat{v},\hat{q})$ vérifie (1), (4), (6). On caractérise $(\hat{v},\hat{q})$ par un système d'optimalité à l'aide de la méthode de pénalisation. Plus précisément, pour $\epsilon > 0$ on introduit la fonction pénalisée $J_\epsilon$ définie par :

$$J_\epsilon(v,q) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} + \frac{1}{2\epsilon}\left\| -\frac{\partial q}{\partial t} + Aq + a_0 q - h - v\chi_\omega \right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))},$$

où les couples $(v,z)$ sont tels que

$$v \in \mathcal{K}^\perp, \quad -\frac{\partial q}{\partial t} + Aq + a_0 q \in L^2\big(\Omega\times(0,T)\big), \quad q = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad q(T) = 0, \quad q(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{12}$$

Le problème de contrôle optimal

$$\inf\big\{J_\epsilon(v,q) \mid (v,q) \text{vérifie (12)}\big\} \tag{13}$$

admet une solution unique $(v_\epsilon, q_\epsilon)$ que l'on caractérise par un système d'optimalité.

**Proposition 1.3.** *On se place sous les hypothèses du Théorème* 1.1. *Le couple* $(v_\epsilon, q_\epsilon)$ *est la solution optimale du problème* (13) *si et seulement s'il existe une fonction* $\rho_\epsilon$ *telle que le triplet* $(v_\epsilon, q_\epsilon, \rho_\epsilon)$ *soit solution du système d'optimalité*

$$-\frac{\partial q_\epsilon}{\partial t} + Aq_\epsilon + a_0 q_\epsilon = h + v_\epsilon\chi_\omega + \epsilon\rho_\epsilon \quad \textit{dans } Q, \quad q_\epsilon = 0 \quad \textit{sur } \Sigma, \quad q_\epsilon(T) = 0 \quad \textit{dans } \Omega, \tag{14}$$

$$q_\epsilon(0) = 0 \quad \textit{dans } \Omega, \quad \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t} + A\rho_\epsilon + a_0\rho_\epsilon = 0 \quad \textit{dans } Q, \quad \rho_\epsilon = 0 \quad \textit{sur } \Sigma, \quad v_\epsilon = (\rho_\epsilon - P\rho_\epsilon\chi_\omega)\chi_\omega. \tag{15}$$

**Remarque 2.** On n'a par contre aucune information sur $\rho_\epsilon(0)$ et $\rho_\epsilon(T)$ ; on n'en obtient pas moins la convergence du triplet $(v_\epsilon, q_\epsilon, \rho_\epsilon)$ quand $\epsilon \to 0$ vers un triplet $(\hat{v},\hat{q},\hat{\rho})$ caractéristique de la solution optimale du problème (1), (4)–(6).

Plus précisément, on a

**Théorème 1.4.** *On se place sous les hypothèses du Théorème* 1.1. *Le couple* $(\hat{v},\hat{q})$ *est la solution optimale du problème* (1), (4)–(6) *si et seulement s'il existe une fonction* $\hat{\rho}$ *tel que le triplet* $(\hat{v},\hat{q},\hat{\rho})$ *soit solution du système d'optimalité*

$$\hat{v} \in \mathcal{K}^{\perp}, \quad \hat{q} \in C\big([0,T], L^2(\Omega)\big) \cap L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big), \quad \hat{\rho} \in V_{\theta,P}, \tag{16}$$
$$-\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + A\hat{q} + a_0\hat{q} = h + \hat{v}\chi_\omega \quad \textit{dans } Q, \quad \hat{q} = 0 \quad \textit{sur } \Sigma, \quad \hat{q}(T) = 0 \quad \textit{dans } \Omega; \tag{17}$$
$$\hat{q}(0) = 0 \quad \textit{dans } \Omega; \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + A\hat{\rho} + a_0\hat{\rho} = 0 \quad \textit{dans } Q, \quad \hat{\rho} = 0 \quad \textit{sur } \Sigma; \quad \hat{v} = (\hat{\rho} - P\hat{\rho}\chi_\omega)\chi_\omega. \tag{18}$$

On trouvera là aussi le détail des calculs dans [4].

## 2. Applications aux sentinelles

On considère dans une première étape une équation d'état qui, ici, est donnée par le système d'évolution parabolique suivant :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = \xi + \lambda\hat{\xi} \quad \text{dans } Q, \quad y = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad y(0) = y^0 + \tau\hat{y}^0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{19}$$

où $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est de classe $C^1$, et où les données en (19) sont incomplètes au sens suivant : les fonctions $\xi$ and $y^0$ sont connues avec $\xi$ dans $L^2(Q)$ et $y^0$ dans $L^2(\Omega)$. Par contre, les termes $\lambda\hat{\xi}$ et $\tau\hat{y}^0$ ne sont pas connus. On suppose que

$$\|\hat{\xi}\|_{L^2(Q)} \leqslant 1, \quad \|\hat{y}^0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \lambda \in R,\ \tau \in R \quad \text{sont assez petits.}$$

On fait alors l'hypothèse qu'il existe une solution unique $y = y(x,t;\lambda,\tau) = y(\lambda,\tau) \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$.

On donne ensuite dans une deuxième étape une observation $y_{\text{obs}}$ de $y$ sur un ouvert non vide $O$ de $\Omega$, soit : $y_{\text{obs}} = m_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i m_i$ où les fonctions $m_0, m_1, \ldots, m_N$ sont connues dans $L^2(O \times (0,T))$, mais les coefficients réels $\beta_i$ ne sont pas connus. On suppose que les $\beta_i$ sont « petits » et que les fonctions $m_i$ sont linéairement indépendantes.

On considère enfin dans une troisième étape une fonctionnelle $S$ à déterminer à partir d'une fonction $h_0$ de $L^2(O \times (0,T))$ et d'un ouvert non vide $\omega$ tel que $\omega \subset O \subset \Omega$. Plus précisément, pour une fonction contrôle $w \in L^2(\omega \times (0,T))$, on pose

$$S(\lambda,\tau) = \int_0^T\!\!\int_O h_0 y(x,t;\lambda,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\!\!\int_\omega w y(x,t;\lambda,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

**Définition 2.1.** On dit que $S$ est la sentinelle discriminante définie par $h_0, \omega$ et $O$ s'il existe un contrôle $w$ tel que le couple $(w,S)$ vérifie les trois conditions suivantes :

$$\int_0^T\!\!\int_O h_0 m_i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\!\!\int_\omega w m_i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{21}$$
$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0 \quad \forall \hat{y}^0, \tag{22}$$
$$\|w\|_{L^2(\omega\times(0,T))} = \text{minimum}. \tag{23}$$

**Remarque 3.** Le cas $\omega = O$ correspond à la notion originelle de sentinelles telle que introduite par Lions dans [3] pour une observation et un contrôle de supports dans un même ouvert $\omega = O$. On propose donc dans la définition précédente une généralisation de la notion de sentinelles au cas d'une observation et d'un contrôle de supports dans deux ouverts distincts $\omega \neq O$.

L'existence d'un contrôle $w$, et donc d'une sentinelle $S$, est en fait équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. Pour le voir, on transforme les conditions (21) et (22). Pour la condition (21), on considère le sous espace vectoriel de $L^2(\omega \times (0,T))$ engendré par les fonctions $m_i \chi_\omega$. Soit $\mathcal{K}$ cet espace, alors il existe $k_0$ unique dans $\mathcal{K}$ tel que

$$\int_0^T\int_O h_0 m_i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\omega k_0 m_i \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Si donc, on note $\mathcal{K}^\perp$ le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{K}$ dans $L^2(\omega \times (0,T))$, alors la condition (21) est équivalente à $w - k_0 = v \in \mathcal{K}^\perp$. On transforme ensuite la condition (22) en revenant d'une part à la définition de $\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0)$ et en introduisant d'autre part un état adjoint $q$ . On montre alors que la recherche d'un contrôle $w$ tel que le couple $(w,S)$ vérifie (21)–(23) est équivalente à la recherche d'un contrôle $v$ tel que le couple $(v,q)$ soit solution du système suivant :

$$\begin{cases} v \in \mathcal{K}^\perp, \quad -\dfrac{\partial q}{\partial t} + Aq + f'(y_0)q = h_0\chi_O + k_0\chi_\omega + v\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ q = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad q(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad q(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \|v\|_{L^2(\omega\times(0,T))} = \text{minimum}, \end{cases} \tag{24}$$

où $f'(y_0)$ désigne la dérivée de $f$ au point $y_0$ et où $y_0$ est la solution du problème

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} + Ay_0 + f(y_0) = \xi \quad \text{dans } Q, \quad y_0 = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad y_0(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On reconnait alors dans le problème (24) le problème (1), (4)–(6) avec $a_0 = f'(y_0)$ et $h = h_0\chi_O + k_0\chi_\omega$.

## 3. Orientation

On trouvera dans [4] une étude détaillée de la notion de sentinelle, en particulier des conditions suffisantes sur $h_0$ et $k_0$ pour assurer l'existence d'une sentinelle. On trouvera aussi dans [4] d'autres exemples de sentinelles dans le cas $\omega \subset O$. Ils conduisent à de nouveaux problèmes de contrôlabilité avec contraintes sur le contrôle.

## Remerciements

L'auteur remercie J. P. Puel qui a accepté de venir nous présenter à Pointe à Pitre en 2002 les inégalités de Carleman. Nous le remercions aussi pour les nombreux échanges et les séances de travail qui ont suivi à Paris. Le présent travail lui doit beaucoup, en particulier le Lemme 1.2.

## Références

[1] A. Fursikov, O.Yu. Imanuavilov, Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Korea, 1996.
[2] G. Lebeau, L. Robbiano, Contrôle exacte de l'équation de la chaleur, Comm. Partial Differential Equations 20 (1995) 335–356.
[3] J.-L. Lions, Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes, Masson, Paris, 1992.
[4] O. Nakoulima, Sentinels for distributed systems with observation and control having their support in two different open subsets, Preprint.
[5] J.-P. Puel, Contrôlablité approchée et contrôlabilité exacte, Notes de cours de D.E.A., Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2001.
[6] J.-P. Puel, Applications of global Carleman inequalities to contrôllabily and inverse problems, in press.
[7] D.L. Russel, A unified boundary contrllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations, Stud. Appl. Math. 52 (3) (1973) 189–212.