Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 487–492
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Fonctions constructibles et intégration motivique II

Raf Cluckers [a], François Loeser [b]

[a] *Katholieke Universiteit Leuven, Department of Mathematics, Celestijnenlaan 200B, 3001 Leuven, Belgium*
[b] *École normale supérieure, département de mathématiques et applications, UMR 8553 du CNRS, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France*

Reçu le 22 mars 2004 ; accepté après révision le 1er juin 2004

Disponible sur Internet le 9 septembre 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

On étend le formalisme d'une Note précédente à un cadre global dans lequel on établit un théorème d'intégration dans les fibres ainsi qu'un théorème de Fubini. On compare notre formalisme avec les constructions antérieures de Denef et Loeser. ***Pour citer cet article : R. Cluckers, F. Loeser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Constructible functions and motivic integration II. We extend the formalism of an earlier Note to a global setting for which a theorem on fiber integrals and a Fubini theorem are obtained. We compare our formalism to the previous constructions given by Denef and Loeser. ***To cite this article: R. Cluckers, F. Loeser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

The present Note is a sequel to [1] from which we shall keep the notation. In particular, we fix a field k of characteristic 0. Let $\mathcal{X}$ be a variety over $k((t))$, that is, a reduced and separated scheme of finite type over $k((t))$, and let X be a variety over k. For r an integer $\geqslant 0$, we denote by $h[\mathcal{X}, X, r]$ the functor $F_k \to \mathrm{Ens}$ given by $K \mapsto \mathcal{X}(K((t))) \times X(K) \times \mathbf{Z}^r$. When $X = \operatorname{Spec} k$ and $r = 0$, we write $h[\mathcal{X}]$ for $h[\mathcal{X}, X, r]$. If $\mathcal{X}$ and X are affine and if $i : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathbf{A}^m_{k((t))}$ and $j : X \hookrightarrow \mathbf{A}^n_k$ are closed immersions, we say a subassignment h of $h[\mathcal{X}, X, r]$ is definable if its image by the morphism $h[\mathcal{X}, X, r] \to h[m, n, r]$ induced by i and j is a definable subassignment of $h[m, n, r]$. This

Adresses e-mail : raf.cluckers@wis.kuleuven.ac.be (R. Cluckers), Francois.Loeser@ens.fr (F. Loeser).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.06.027

definition does not depend on i and j. More generally, we shall say a subassignment h of $h[\mathcal{X}, X, r]$ is definable if there exists coverings $(\mathcal{U}_i)$ and (U_j) of $\mathcal{X}$ and X by affine open subsets such that $h \cap h[\mathcal{U}_i, U_j, r]$ is a definable subassignment of $h[\mathcal{U}_i, U_j, r]$ for every i and j. We get in this way a category GDef_k whose objects are definable subassignments of some $h[\mathcal{X}, X, r]$, morphisms being definable morphisms, that is, morphisms whose graphs are definable subassignments. The category Def_k is a full subcategory of GDef_k. The definition of dimension given in [1] may be directly generalized to objects of GDef_k. Also the definition of $C_+(S)$ for S in GDef_k directly extends.

Let S be a definable subassignment of some $h[\mathcal{X}, X, r]$. We denote by $\mathcal{A}(S)$ the ring of definable morphisms $S \to h[\mathbf{A}^1_{k((t))}]$. Let us define, for i in $\mathbf{N}$, the $\mathcal{A}(S)$-module $\Omega^i(S)$ of definable i-forms on S. Let $\mathcal{Y}$ be the closed subset of $\mathcal{X}$, which is the Zariski closure of the image of S under the projection $\pi : h[\mathcal{X}, X, r] \to h[\mathcal{X}]$. We denote by $\Omega^i_{\mathcal{Y}}$ the sheaf of algebraic i-forms on $\mathcal{Y}$, by $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$ the Zariski sheaf associated to the presheaf $U \mapsto \mathcal{A}(h[U])$ on $\mathcal{Y}$, and by $\Omega^i_{h[\mathcal{Y}]}$ the sheaf $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega^i_{\mathcal{Y}}$. We set $\Omega^i(S) := \mathcal{A}(S) \otimes_{\mathcal{A}(h[\mathcal{Y}])} \Omega^i_{h[\mathcal{Y}]}(\mathcal{Y})$, the $\mathcal{A}(h[\mathcal{Y}])$-algebra structure on $\mathcal{A}(S)$ given by composition with π. We now assume that S is of dimension d. We denote by $\mathcal{A}^<(S)$ the ideal of functions in $\mathcal{A}(S)$ that are zero outside a definable subassignment of dimension $< d$. There is a canonical morphism of abelian semigroups $\lambda : \mathcal{A}(S)/\mathcal{A}^<(S) \to C^d_+(S)$ sending the class of a function f to the class of $\mathbf{L}^{-\operatorname{ord} f}$, with the convention $\mathbf{L}^{-\operatorname{ord} 0} = 0$. We set $\widetilde{\Omega}^d(S) = \mathcal{A}(S)/\mathcal{A}^<(S) \otimes_{\mathcal{A}(S)} \Omega^d(S)$, and we define the set $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ of definable positive volume forms as the quotient of the free abelian semigroup on symbols (ω, g) with ω in $\widetilde{\Omega}^d(S)$ and g in $C^d_+(S)$ by relations $(f\omega, g) = (\omega, \lambda(f)g)$, $(\omega, g + g') = (\omega, g) + (\omega, g')$ and $(\omega, 0) = 0$, for $f \in \mathcal{A}(S)/\mathcal{A}^<(S)$. We write $g|\omega|$ for the class (ω, g), in order to have $g|f\omega| = g\mathbf{L}^{-\operatorname{ord} f}|\omega|$. The $\mathcal{C}_+(S)$-semimodule structure on $C^d_+(S)$ induces, after passing to the quotient, a structure of semiring on $C^d_+(S)$, and $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ is naturally endowed with a structure of $C^d_+(S)$-semimodule. We shall call an element $|\omega|$ in $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ a gauge form if it is a generator of that semimodule. If S is a definable subassignment of dimension d of $h[m, n, r]$, one may construct, similarly as Serre [9] in the p-adic case, a canonical gauge form $|\omega_0|_S$ on S.

Let $f : S \to S'$ be a morphism in Def_k, with S of dimension s and S' of dimension s'. Using affine charts and canonical gauge forms on these charts, we define f-integrable forms α in $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ and their pushforward $f_!^{\mathrm{top}}(\alpha)$ in $|\widetilde{\Omega}|_+(S')$. When f is the morphism to $h[0, 0, 0]$, we say integrable for f-integrable and we write $\int_S \alpha$ for $f_!^{\mathrm{top}}(\alpha)$. We have the following Fubini Theorem for motivic integration:

Theorem 0.1 (Fubini Theorem). *Let $f : S \to S'$ be a morphism in* GDef_k. *Assume S is of dimension s, S' is of dimension s', and that the fibers of f are all of dimension $s - s'$. A form α in $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ is integrable if and only if it is f-integrable and $f_!^{\mathrm{top}}(\alpha)$ is integrable. When this holds, then*

$$\int_S \alpha = \int_{S'} f_!^{\mathrm{top}}(\alpha).$$

Finally, in Theorem 3.1 and Theorem 3.2, we explain how the present framework for motivic integration specializes both to ‘classical’ motivic integration as constructed in [3] and to its arithmetic version constructed in [4].

1. Formes volume sur les sous-assignements définissables globaux

1.1. Sous-assignements définissables globaux. Dans ce travail on se place dans le cadre de [1] dont on reprend les notations. En particulier on se donne un corps k de caractéristique 0 et on note F_k la catégorie des corps contenant k. Dans la Note [1] on a défini la catégorie Def_k des sous-assignements définissables. Les objets de Def_k sont de nature affine, étant des sous-assignements des foncteurs $h[m, n, r] : F_k \to \mathrm{Ens}$ donnés par $K \mapsto K((t))^m \times K^n \times \mathbf{Z}^r$. On va maintenant considérer leur analogue global.

Soit $\mathcal{X}$ une variété, c'est-à-dire un schéma de type fini séparé et réduit, sur $k((t))$ et soit X une variété sur k. Pour r un entier $\geqslant 0$ on note $h[\mathcal{X}, X, r]$ le foncteur $F_k \to \mathrm{Ens}$ donné par $K \mapsto \mathcal{X}(K((t))) \times X(K) \times \mathbf{Z}^r$. Lorsque $X = \operatorname{Spec} k$ et $r = 0$, on écrit $h[\mathcal{X}]$ pour $h[\mathcal{X}, X, r]$. Si $\mathcal{X}$ et X sont affines et si $i : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathbf{A}^m_{k((t))}$ et $j : X \hookrightarrow \mathbf{A}^n_k$

sont des immersions fermées, on dit qu'un sous-assignement h de $h[\mathcal{X}, X, r]$ est définissable si son image par le morphisme $h[\mathcal{X}, X, r] \to h[m, n, r]$ associé à i et j est un sous-assignement définissable de $h[m, n, r]$. Cette définition ne dépend pas du choix de i et de j. En général, on dira qu'un sous-assignement h de $h[\mathcal{X}, X, r]$ est définissable s'il existe des recouvrements $(\mathcal{U}_i)$ et (U_j) de $\mathcal{X}$ et X par des ouverts affines tels $h \cap h[\mathcal{U}_i, U_j, r]$ soit un sous-assignement définissable de $h[\mathcal{U}_i, U_j, r]$ pour tout i et j. On obtient ainsi une catégorie GDef_k dont les objets sont les sous-assignements définissables d'un $h[\mathcal{X}, X, r]$, les morphismes étant les morphismes définissables, c'est à dire ceux dont le graphe est un sous-assignement définissable.

La catégorie Def_k est une sous-catégorie pleine de GDef_k. La notion de dimension introduite dans [1] s'étend immédiatement aux objets de GDef_k, ainsi que le fait que la dimension soit invariante par isomorphisme (Proposition 1.1 de [1]). Si S est un objet de GDef_k, les définitions de la catégorie RDef_S, du semi-anneau $\mathcal{C}_+(S)$, de l'anneau $\mathcal{C}(S)$, du $\mathcal{C}_+(S)$-semi-module gradué $C_+(S)$ et du $\mathcal{C}(S)$-module gradué $C(S)$ données en [1] s'étendent directement.

1.2. Formes différentielles définissables. Soit S un sous-assignement définissable d'un $h[\mathcal{X}, X, r]$. On note $\mathcal{A}(S)$ l'anneau des morphismes définissables $S \to h[\mathbf{A}^1_{k((t))}]$. On va définir, pour i dans $\mathbf{N}$, le $\mathcal{A}(S)$-module $\Omega^i(S)$ des i-formes définissables sur S. Soit $\mathcal{Y}$ le fermé de $\mathcal{X}$, adhérence de Zariski de l'image de S par la projection $\pi : h[\mathcal{X}, X, r] \to h[\mathcal{X}]$. On considère le faisceau $\Omega^i_{\mathcal{Y}}$ des i-formes algébriques sur $\mathcal{Y}$, on note $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$ le faisceau Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{A}(h[U])$ sur $\mathcal{Y}$, $\Omega^i_{h[\mathcal{Y}]}$ le faisceau $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \Omega^i_{\mathcal{Y}}$, et on pose $\Omega^i(S) := \mathcal{A}(S) \otimes_{\mathcal{A}(h[\mathcal{Y}])} \Omega^i_{h[\mathcal{Y}]}(\mathcal{Y})$, la structure de $\mathcal{A}(h[\mathcal{Y}])$-algèbre sur $\mathcal{A}(S)$ étant donnée par composition avec π.

1.3. Formes volume définissables. On suppose maintenant que S est de dimension d. On note $\mathcal{A}^<(S)$ l'idéal des fonctions dans $\mathcal{A}(S)$ qui sont nulles en dehors d'un sous-assignement définissable de dimension $< d$. On a un morphisme canonique de semi-groupes abéliens $\lambda : (\mathcal{A}(S)/\mathcal{A}^<(S)) \to C^d_+(S)$ qui envoie la classe d'une fonction f sur la classe de $\mathbf{L}^{-\operatorname{ord} f}$, avec la convention $\mathbf{L}^{-\operatorname{ord} 0} = 0$. On pose $\widetilde{\Omega}^d(S) = \mathcal{A}(S)/\mathcal{A}^<(S) \otimes_{\mathcal{A}^<(S)} \Omega^d(S)$, et on définit l'ensemble $|\Omega|_+(S)$ des formes volume positives définissables comme le quotient du semi-groupe abélien libre sur les symboles (ω, g) avec ω dans $\widetilde{\Omega}^d(S)$ et g dans $C^d_+(S)$ par les relations $(f\omega, g) = (\omega, \lambda(f)g)$, $(\omega, g + g') = (\omega, g) + (\omega, g')$ et $(\omega, 0) = 0$. On écrira $g|\omega|$ pour la classe de (ω, g), de façon à ce que $g|f\omega| = g\mathbf{L}^{-\operatorname{ord} f}|\omega|$. La structure de $\mathcal{C}_+(S)$-semi-module sur $C^d_+(S)$ induit par passage au quotient une structure de semi-anneau sur $C^d_+(S)$ et $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ est muni naturellement d'une structure de $C^d_+(S)$-semi-module. On dit que $|\omega|$ dans $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ est une forme jauge si c'est un générateur de ce semi-module. On vérifie qu'il existe toujours des formes jauges. On définit de façon similaire $|\widetilde{\Omega}|(S)$ en remplaçant C^d_+ par C^d. Pour des raisons de place on ne donnera toutefois dans cette note que des énoncés concernant les formes volumes positives.

Si S est un sous-assignement définissable de dimension d de $h[m, n, r]$, on dispose, de façon analogue à la construction de Serre [9] dans le cas p-adique, d'une forme jauge canonique sur S, notée $|\omega_0|_S$. Désignons par $x_1, \ldots, x_m$ les coordonnées sur $\mathbf{A}^m_{k((t))}$ et considérons les d-formes $\omega_I := \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_d}$ pour $I = \{i_1, \ldots, i_d\} \subset \{1, \ldots, m\}$, $i_1 < \cdots < i_d$ et leur image $|\omega_I|_S$ dans $|\Omega|_+(S)$. On vérifie qu'il existe un unique élément $|\omega_0|_S$ de $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ tel que, pour tout I, il existe des fonctions définissables à valeurs entières α_I et β_I sur S, β_I ne prenant que les valeurs 0 et 1, telles que $\alpha_I + \beta_I > 0$ sur S, $|\omega_I|_S = \beta_I \mathbf{L}^{-\alpha_I}|\omega_0|_S$ dans $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ et $\inf_I \alpha_I = 0$.

Si $f : S \to S'$ est un morphisme dans GDef_k avec S et S' de dimension d et dont toutes les fibres sont de dimension 0, on dispose d'une application $f^* : |\widetilde{\Omega}|_+(S') \to |\widetilde{\Omega}|_+(S)$ induite par l'image inverse des formes différentielles. Ceci résulte du fait que f est « analytique » dans le complémentaire d'un sous-assignement définissable de dimension $d - 1$ de S. Si S et S' sont de plus des objets de Def_k, on définit l'ordre du jacobien $\operatorname{ord}\operatorname{jac} f$ de f, cf. [1]), par $f^*|\omega_0|_{S'} = \mathbf{L}^{-\operatorname{ord}\operatorname{jac} f}|\omega_0|_S$.

Si $\mathcal{X}$ est une $k((t))$-variété de dimension d, admettant un $k[[t]]$-modèle $\mathcal{X}^0$, on peut définir un élément $|\omega_0|$ de $|\widetilde{\Omega}|_+(h[\mathcal{X}])$, ne dépendant que de $\mathcal{X}^0$, caractérisé par le fait que pour tout ouvert U^0 de $\mathcal{X}^0$ sur lequel le $k[[t]]$-module $\Omega^d_{U^0|k[[t]]}(U^0)$ est engendré par une forme ω non nulle, $|\omega_0|_{|h[U^0 \otimes \operatorname{Spec} k((t))]} = |\omega|$ dans $|\widetilde{\Omega}|_+(h[U^0 \otimes \operatorname{Spec} k((t))])$.

2. Intégration des formes volume et théorème de Fubini

Soit $f:S\to S'$ un morphisme dans Def_k, avec S de dimension s et S' de dimension s'. Toute forme volume positive α dans $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ s'écrit $\alpha=\psi_\alpha|\omega_0|_S$ avec ψ_α dans $C^s_+(S)$. On dit que α est f-intégrable si ψ_α est f-intégrable et on pose alors

$$f_!^{\mathrm{top}}(\alpha):=\left\{f_!(\psi_\alpha)\right\}_{s'}|\omega_0|_{S'},$$

$\{f_!(\psi_\alpha)\}_{s'}$ désignant la composante de $f_!(\psi_\alpha)$ dans $C^{s'}_+(S')$. Considérons maintenant $f:S\to S'$ un morphisme dans GDef_k. Supposons qu'il existe des isomorphismes $\varphi:T\to S$ et $\varphi':T'\to S'$ avec T et T' dans Def_k. On note $\tilde f$ le morphisme $T\to T'$ vérifiant $\varphi'\circ\tilde f=f\circ\varphi$. On dira que α dans $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ est f-intégrable si $\varphi^*(\alpha)$ est $\tilde f$-intégrable et on définit alors $f_!^{\mathrm{top}}(\alpha)$ par la relation

$$\tilde f_!^{\mathrm{top}}\big(\varphi^*(\alpha)\big)=\varphi'^*\big(f_!^{\mathrm{top}}(\alpha)\big).$$

Il résulte du Théorème 2 de [1] que cette définition ne dépend pas du choix des isomorphismes φ et φ'. Par additivité, et en utilisant des cartes affines, on étend ce qui précède à un morphisme arbitraire $f:S\to S'$ dans GDef_k, de façon à définir les formes volumes f-intégrables dans $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ et pour de telles formes α l'intégrale dans les fibres $f_!^{\mathrm{top}}(\alpha)$ appartenant à $|\widetilde{\Omega}|_+(S')$. Quand $S=h[0,0,0]$, on dit que α est intégrable au lieu de f-intégrable, et on écrit $\int_S\alpha$ à la place de $f_!^{\mathrm{top}}(\alpha)$.

Le résultat suivant est une conséquence du Théorème 3.2 de [1].

Théorème 2.1 (Théorème de Fubini). *Soit $f:S\to S'$ un morphisme dans GDef_k. On suppose que S est de dimension s, que S' est de dimension s', et que toutes les fibres de f sont de dimension $s-s'$. Une forme volume positive α dans $|\widetilde{\Omega}|_+(S)$ est intégrable si et seulement si elle est f-intégrable et $f_!^{\mathrm{top}}(\alpha)$ est intégrable. Si c'est le cas, alors*

$$\int_S\alpha=\int_{S'}f_!^{\mathrm{top}}(\alpha).$$

3. Comparaison avec les constructions antérieures

3.1. Comparaison avec la construction classique. Dans la définition de Def_k, RDef_k et GDef_k, au lieu de considérer la catégorie F_k des corps contenant k, on pourrait choisir de se restreindre à la sous-catégorie ACF_k des corps algébriquement clos contenant k et définir ainsi des catégories $\mathrm{Def}_{k,\mathrm{ACF}_k}$, etc. Il résulte du théorème de constructibilité de Chevalley que $K_0(\mathrm{RDef}_{k,\mathrm{ACF}_k})$ n'est autre que l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathrm{Var}_k)$ considéré dans [3]. On dispose ainsi d'un morphisme canonique $SK_0(\mathrm{RDef}_k)\to K_0(\mathrm{Var}_k)$ envoyant $\mathbf{L}$ sur la classe de $\mathbf{A}^1_k$ également notée $\mathbf{L}$, que l'on peut étendre en un morphisme $\gamma:SK_0(\mathrm{RDef}_k)\otimes_{\mathbf{N}[\mathbf{L}-1]}A_+\to K_0(\mathrm{Var}_k)\otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]}A$. En considérant le développement en série de $(1-\mathbf{L}^{-i})^{-1}$, on définit également un morphisme canonique $\delta:K_0(\mathrm{Var}_k)\otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]}A\to\widehat{\mathcal{M}}$, avec $\widehat{\mathcal{M}}$ le complété de $K_0(\mathrm{Var}_k)[\mathbf{L}^{-1}]$ pour la filtration par la dimension virtuelle considéré dans [3].

Soit X une variété algébrique sur k de dimension d. Posons $\mathcal{X}^0:=X\otimes_{\mathrm{Spec}\,k}\mathrm{Spec}\,k[[t]]$ et $\mathcal{X}:=\mathcal{X}^0\otimes_{\mathrm{Spec}\,k[[t]]}\mathrm{Spec}\,k((t))$. Considérons un sous-assignement définissable W de $h[\mathcal{X}]$ dans le langage $\mathcal{L}_{\mathrm{DP}}$, avec la restriction que les constantes dans la sorte de type Val apparaissant dans les formules définissant W dans des cartes affines définies sur k sont dans k (et non dans $k((t))$). On suppose que $W(K)\subset\mathcal{X}(K[[t]])$ pour tout K dans F_k. Avec les notations de [3], les formules définissant W dans une carte affine définissent un sous-ensemble semi-algébrique de l'espace des arcs $\mathcal{L}(X)$ dans la carte correspondante, et de cette façon on associe canoniquement à W une partie semi-algébrique $\widetilde{W}$ de $\mathcal{L}(X)$. De même à toute fonction définissable à valeurs entières α sur W (vérifiant la condition additionnelle que les constantes dans la sorte de type Val apparaissant dans les formules définissant α ne peuvent être prises que dans k) on associe une fonction semi-algébrique $\tilde\alpha$ sur $\widetilde{W}$.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses précédentes, si* $|\omega_0|$ *est la forme volume canonique sur* $h[\mathcal{X}]$*, pour toute fonction définissable à valeurs entières* α *sur* W *vérifiant les conditions précédentes et bornée inférieurement,* $\mathbf{1}_W \mathbf{L}^{-\alpha}|\omega_0|$ *est intégrable sur* $h[\mathcal{X}]$ *et*

$$(\delta \circ \gamma)\Biggl(\int_{h[\mathcal{X}]} \mathbf{1}_W \mathbf{L}^{-\alpha}|\omega_0|\Biggr) = \int_{\widetilde{W}} \mathbf{L}^{-\tilde{\alpha}}\,\mathrm{d}\mu',$$

μ' *désignant la mesure motivique construite dans* [3].

Il résulte du Théorème 3.1 que pour les ensembles et les fonctions semi-algébriques l'intégrale motivique construite dans [3] existe déjà dans $K_0(\mathrm{Var}_k) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]} A$, sans qu'il soit nécessaire de compléter d'avantage l'anneau de Grothendieck.

3.2. Comparaison avec l'intégration motivique arithmétique. A la place de ACF_k, on peut aussi considérer la catégorie PFF_k des corps pseudo-finis contenant k. Rappelons qu'un tel corps est un corps parfait F admettant une unique extension de degré n pour tout n dans une clôture algébrique fixée, et tel que toute variété géométriquement irréductible sur F admette un point F-rationnel. Par restriction de F_k à PFF_k on définit des catégories $\mathrm{Def}_{k,\mathrm{PFF}_k}$, etc. En particulier l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathrm{RDef}_{k,\mathrm{PFF}_k})$ est identique à l'anneau noté $K_0(\mathrm{PFF}_k)$ dans [5] et [6].

Dans l'article [4], l'intégrale motivique arithmétique prenait ses valeurs dans un certain complété $\widehat{K}_0^{v}(\mathrm{Mot}_{k,\bar{\mathbf{Q}}})_{\mathbf{Q}}$ d'un anneau noté $K_0^{v}(\mathrm{Mot}_{k,\bar{\mathbf{Q}}})_{\mathbf{Q}}$. Ce n'est qu'un peu plus tard qu'il a été remarqué dans [5] et [6] que l'on peut se restreindre à un anneau plus petit noté $K_0^{\mathrm{mot}}(\mathrm{Var}_k) \otimes \mathbf{Q}$, dont nous allons maintenant rappeler la définition.

Le corps k étant de caractéristique zéro, il existe, d'après [7] et [8], un unique morphisme d'anneaux $K_0(\mathrm{Var}_k) \to K_0(\mathrm{CHMot}_k)$ associant à la classe d'une variété X projective et lisse sur k la classe de son motif de Chow. Ici $K_0(\mathrm{CHMot}_k)$ désigne l'anneau de Grothendieck de la catégorie des motifs de Chow sur k (avec coefficients rationnels). Par définition $K_0^{\mathrm{mot}}(\mathrm{Var}_k)$ est l'image de $K_0(\mathrm{Var}_k)$ dans $K_0(\mathrm{CHMot}_k)$ par ce morphisme. [Noter qu'il n'est pas clair que la définition de $K_0^{\mathrm{mot}}(\mathrm{Var}_k)$ donnée dans [5] soit équivalente et qu'il convient de la remplacer par celle donnée ci-dessus.] Dans [5] et [6], les auteurs ont construit, en utilisant des résultats de [4], un morphisme canonique $\chi_c : K_0(\mathrm{PFF}_k) \to K_0^{\mathrm{mot}}(\mathrm{Var}_k) \otimes \mathbf{Q}$.

La mesure motivique arithmétique prend ses valeurs dans une certaine complétion $\widehat{K}_0^{\mathrm{mot}}(\mathrm{Var}_k) \otimes \mathbf{Q}$ de la localisation de $K_0^{\mathrm{mot}}(\mathrm{Var}_k) \otimes \mathbf{Q}$ par rapport à la classe de l'image de la droite affine. On dispose d'un morphisme canonique $\tilde{\gamma} : SK_0(\mathrm{RDef}_k) \otimes_{\mathbf{N}[\mathbf{L}-1]} A_+ \to K_0(\mathrm{PFF}_k) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]} A$. D'autre part, le morphisme χ_c induit, après développement en série géométrique de $(1 - \mathbf{L}^{-i})^{-1}$, un morphisme canonique $\tilde{\delta} : K_0(\mathrm{PFF}_k) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]} A \to \widehat{K}_0^{\mathrm{mot}}(\mathrm{Var}_k) \otimes \mathbf{Q}$.

Soit X une variété algébrique sur k de dimension d. Posons $\mathcal{X}^0 := X \otimes_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\,k[[t]]$, $\mathcal{X} := \mathcal{X}^0 \otimes_{\mathrm{Spec}\,k[[t]]} \mathrm{Spec}\,k((t))$ et considérons un sous-assignement définissable W de $h[\mathcal{X}]$ vérifiant les conditions de 3. Les formules définissant W dans une carte affine permettent de définir, dans la terminologie et avec les notations de [4], un sous-assignement définissable de $h_{\mathcal{L}(X)}$ dans la carte correspondante, ce qui permet d'associer canoniquement à W un sous-assignement définissable $\widetilde{W}$ de $h_{\mathcal{L}(X)}$.

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes,* $\mathbf{1}_W|\omega_0|$ *est intégrable sur* $h[\mathcal{X}]$ *et*

$$(\tilde{\delta} \circ \tilde{\gamma})\Biggl(\int_{h[\mathcal{X}]} \mathbf{1}_W|\omega_0|\Biggr) = \nu(\widetilde{W}),$$

ν *désignant la mesure motivique arithmétique définie dans* [4].

Il résulte du Théorème 3.2 que dans le présent contexte l'intégrale motivique arithmétique construite dans [4] existe déjà dans $K_0(\mathrm{PFF}_k) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]} A$, sans qu'il soit nécessaire de compléter d'avantage l'anneau de Grothendieck ni de passer aux motifs de Chow.

Les détails des constructions et des preuves seront donnés dans [2].

Remerciements

Pendant la réalisation de ce projet, le premier auteur était chercheur postdoctoral du Fonds de Recherche Scientifique, Flandres (Belgique) et il a bénéficié du soutien partiel du projet européen EAGER.

Références

[1] R. Cluckers, F. Loeser, Fonctions constructibles et intégration motivique I, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).
[2] R. Cluckers, F. Loeser, Constructible motivic functions and motivic integratio, en préparation.
[3] J. Denef, F. Loeser, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, Invent. Math. 135 (1999) 201–232.
[4] J. Denef, F. Loeser, Definable sets, motives and p-adic integrals, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001) 429–469.
[5] J. Denef, F. Loeser, Motivic integration and the Grothendieck group of pseudo-finite fields, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. II, Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 13–23.
[6] J. Denef, F. Loeser, On some rational generating series occuring in arithmetic geometry, math.NT/0212202.
[7] H. Gillet, C. Soulé, Descent, motives and K-theory, J. Reine Angew. Math. 478 (1996) 127–176.
[8] F. Guillén, V. Navarro Aznar, Un critère d'extension d'un foncteur défini sur les schémas lisses, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 95 (2002) 1–91.
[9] J.-P. Serre, Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 54 (1981) 323–401.