Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 327–330
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Théorie des nombres

Sur les nombres de Fibonacci de la forme $q^k y^p$

Yann Bugeaud [a], Maurice Mignotte [a], Samir Siksek [b]

[a] *Université Louis Pasteur, U.F.R. de mathématiques, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France*
[b] *Department of Mathematics and Statistics, College of Science, Sultan Qaboos University, PO Box 36, Al-Khod 123, Oman*

Reçu le 27 mai 2004 ; accepté le 18 juin 2004

Disponible sur Internet le 28 juillet 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Nous étudions l'équation $F_n = q^k y^p$ où q est un nombre premier et k un entier positif. Nous la résolvons pour tous les $q \not\equiv 1 \pmod 4$ et obtenons des conditions nécessaires lorsque $q \equiv 1 \pmod 4$. En particulier, nous répondons à une question de Ribenboim concernant l'équation $F_n = 2^k y^p$. ***Pour citer cet article : Y. Bugeaud et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

On Fibonacci numbers of the form $q^k y^p$. We study the equation $F_n = q^k y^p$ where q is a prime number and k is a positive integer. We solve it for all $q \not\equiv 1 \pmod 4$ and get partial results when $q \equiv 1 \pmod 4$. In particular, we answer Ribenboim's question about $F_n = 2^k y^p$. ***To cite this article: Y. Bugeaud et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction

Dans un travail précédent [3], nous avons démontré le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Les seuls nombres de Fibonacci qui sont des puissances pures sont* $F_n = 0,\ 1,\ 1,\ 8$ *et* 144*, qui correspondent respectivement à* $n = 0,\ 1,\ 2,\ 6$ *et* 12*. De plus, les seuls nombres de Lucas qui sont des puissances pures sont* $L_n = 1$ *et* 4*, pour lesquels* $n = 1$ *et* 3.

La démonstration, qui combine la théorie de Baker et la méthode modulaire, a requis environ une semaine de calculs effectués à l'aide des logiciels `pari` [1] et `magma` [2].

Adresses e-mail : bugeaud@math.u-strasbg.fr (Y. Bugeaud), mignotte@math.u-strasbg.fr (M. Mignotte), siksek@squ.edu.om (S. Siksek).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.06.007

Dans la présente Note, nous étudions des conséquences élémentaires de ce résultat : nous résolvons partiellement l'équation $F_n = q^k y^p$, avec $k > 0$, où p et q sont des nombres premiers et $y \geqslant 1$. Nous commençons par traiter le cas $q = 2$, qui répond à une question de Ribenboim, intéressé par ce problème en raison de son algorithme (voir [6]) pour résoudre l'équation $F_n = ay^p$, où a et p sont fixés.

Théorème 1.2. *Les seules solutions de l'équation*

$$F_n = 2^k y^p, \quad k > 0,$$

avec y impair sont données par $n = 3,\ 6$ et 12. De plus les seules solutions de l'équation

$$L_n = 2^k y^p, \quad k > 0,$$

avec y impair sont données par $n = 0,\ 3$ et 6.

Pour q impair nous obtenons le résultat partiel suivant.

Théorème 1.3. *Soit q un nombre premier impair. Considérons l'équation*

$$F_n = q^k y^p, \quad k > 0,\ p \text{ premier.} \tag{1}$$

Alors

- *soit n est pair et alors $n = 0$, $F_n = 0$ ou $n = 4$, $F_n = 3$ ou $n = 12$ et $F_n = 3^2 \times 4^2 = 3^2 \times 2^4$,*
- *soit n est impair, $q \equiv 1 \pmod 4$ et le plus petit entier $r > 0$ tel que q divise F_r est impair. Si une telle solution n existe et si $q \neq 5$, alors il existe une solution pour laquelle q ne divise pas n. Pour $q = 5$, la seule solution est $F_5 = 5$. De plus, pour $5 < q < 100$, les seules valeurs pour lesquelles r est impair sont $q = 13, 17,\ 37,\ 53,\ 61,\ 73,\ 89$ et 97.*

2. Rappels

Les résultats ci-après sont classiques, et sont rappelés dans [6].

Lemme 2.1. *Les nombres de Fibonacci et Lucas vérifient* :

$$F_n = \frac{\omega^n - \tau^n}{\sqrt{5}}, \quad L_n = \omega^n + \tau^n, \quad \text{où } \omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \tau = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

De plus, on a

$$F_{2n} = F_n L_n, \qquad F_{3n} = F_n\big(5F_n^2 + 3(-1)^n\big), \tag{2}$$

$$L_{2n} = L_n^2 + 2(-1)^{n+1}, \qquad L_{3n} = L_n\big(L_n^2 + 3(-1)^{n+1}\big), \tag{3}$$

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n. \tag{4}$$

Enfin, si $n = rm$ avec $m > 1$ et $r > 1$, alors il existe un entier $Z > 1$ tel que

$$F_n = ZF_m \quad \text{et} \quad \operatorname{pgcd}(Z, F_m) \text{ divise } r. \tag{5}$$

Le lemme suivant est encore plus élémentaire.

Lemme 2.2. *Les résidus de L_n et F_n modulo* 4 *dépendent seulement de n modulo* 6 *et sont donnés par la table*

$$\begin{array}{rl} n & \bmod 6: 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \\ F_n & \bmod 4: 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1, \\ L_n & \bmod 4: 2,\ 1,\ 3,\ 0,\ 3,\ 3. \end{array}$$

De plus,

- $3 \mid F_n$ *si, et seulement si,* $n \equiv 0 \pmod 4$, *et*
- $3 \mid L_n$ *si, et seulement si,* $n \equiv 2,\ 6 \pmod 8$.

3. Démonstration du Théorème 1.2

3.1. Cas de la suite de Fibonacci

Supposons d'abord $k = 1$ et montrons qu'on a alors $n = 3$. Supposons qu'il existe $n > 3$ tel que $F_n = 2y^p$ avec y impair et prenons n minimal. Les congruences de la table montrent que $n = 3m$ pour un certain m impair. De (2) nous déduisons $F_m(5F_m^2 - 3) = 2y^p$. Comme m est impair, le Lemme 2.2. montre que $3 \nmid F_m$. On a donc

$$F_m = y_1^p, \quad 5F_m^2 - 3 = 2y_2^p, \quad \text{ou} \quad F_m = 2y_1^p, \quad 5F_m^2 - 3 = y_2^p,$$

avec y_1 et y_2 impairs. Dans le premier cas, nous savons que $m = 1$ et donc $n = 3$, contradiction. Le second cas contredit la minimalité de n.

Supposons maintenant $k \geqslant 2$. Le Lemme 2.2. implique $n \equiv 0 \pmod 6$. Posons $n = 2m$ avec $m \equiv 0,\ 3 \pmod 6$. Alors $F_n = F_m L_m$ et le Lemme 2.2. montre que $8 \mid F_n$, donc $k \geqslant 3$.

Par (4), on voit que $\operatorname{pgcd}(F_m, L_m) = 1$ ou 2. Comme $F_m L_m = F_n = 2^k y^p$, on a

$$F_m = 2y_1^p, \quad L_m = 2^{k-1}y_2^p, \quad \text{ou} \quad F_m = 2^{k-1}y_1^p, \quad L_m = 2y_2^p, \tag{6}$$

avec y_1 et y_2 impairs. Dans le premier cas, $m = 3$, donc $n = 6,\ k = 3$, comme affirmé dans le théorème.

Supposons désormais $k \geqslant 3$ et que la seconde factorisation de (6) a lieu. Si $k = 3$ alors $F_m = 2^2 y_1^p$, qui ne possède pas de solutions. Ainsi, la seule solution pour $k = 3$ est $n = 6$. Si $k = 4$, alors on a $F_m = 2^3 y_1^p$, équation qui vient d'être résolue, donc $m = 6$ et $n = 12$, comme affirmé dans le théorème. Il reste à établir qu'il n'y a pas de solutions si $k > 4$; si tel n'est pas le cas, prenons une solution avec k minimal. On a alors $F_m = 2^{k-1}y_1^p$. La minimalité de $k > 4$ entraîne $k - 1 = 4$, donc $m = 12,\ n = 24$. Comme $F_{24} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23$ n'est pas de la forme $2^k y^p$, on aboutit à une contradiction.

3.2. Cas de la suite de Lucas

Considérons maintenant l'équation $L_n = 2^k y^p$. Le cas $p = 2$ a été résolu par Cohn [4] et donne les solutions de l'énoncé, on supposera donc $p > 2$.

Montrons d'abord que n est impair. Supposons au contraire que $n = 2m$. La première identité de (3) implique $2^k y^p = L_m^2 + 2(-1)^{m+1}$, donc $k = 1$. Écrivant $x = L_m/2$, il vient

$$y^p + (-1)^{mp} = 2x^2.$$

Pour $p \geqslant 5$, l'équation $a^p + b^p = 2c^2$ a été résolue par Ivorra : le Théorème 2 de [5] montre que $x = y = (-1)^m = 1$. Mais $L_m = 2$ est impossible pour $m > 0$. Reste le cas $p = 3$ où l'on voit que $(X, Y) = (2y, 4x)$ est un point entier sur l'une des courbes elliptiques $Y^2 = X^3 \pm 8$. On résout ces équations à l'aide de `magma` et on obtient $(X, Y) = (2, \pm 4),\ (1, \pm 3),\ (46, \pm 312),\ (2, 0)$, ce qui donne $L_m = 0,\ 2,\ 158$, cas tous impossibles pour $m > 0$.

Donc n est impair. Il reste à montrer que $n=3$. Fixons $k>0$ et supposons que n est minimal tel que $L_n=2^k y^p$ et $n>3$. De la table du Lemme 2.2 et du fait que L_n est pair, nous voyons que $n=3m$ pour un certain m impair. Puis la seconde identité de (3) implique $2^k y^p=L_m(L_m^2+3)$. Comme m est impair, la dernière partie du Lemme 2.2 montre que $3\nmid L_m$. Ainsi, on a

$$L_m=2^k y_1^p,\quad L_m^2+3=y_2^p\quad \text{ou}\quad L_m=y_1^p,\quad L_m^2+3=2^k y_2^p,$$

pour des y_1, y_2 convenables. La première possibilité est éliminée comme suit : la minimalité de n implique $m=3$ et donc $L_n=L_9=4\times 19$, contradiction. La seconde possibilité n'a pas lieu en vertu du Théorème 1.1, sauf si $m=1$, qui donne $n=3$ comme affirmé.

4. Preuve du Théorème 1.3

Supposons d'abord n pair dans (1) avec $n>0$, disons $n=2m$. On a alors $F_n=F_mL_m$ et

$$F_m=q^k y_1^p\quad \text{et}\quad L_m=y_2^p,\quad \text{ou}\quad F_m=y_1^p\quad \text{et}\quad L_m=q^k y_2^p,$$

ou

$$F_m=2^{p-l}y_1^p\quad \text{et}\quad L_m=2^l q^k y_2^p,\quad \text{ou}\quad F_m=2^{p-l}q^k y_1^p\quad \text{et}\quad L_m=2^l y_2^p,\quad l\in\{1,2\},$$

où y_1 et y_2 sont certains entiers positifs. Dans le dernier cas, notant que $l=2$ ne peut avoir lieu que si $p=3$ (le pgcd de F_m et L_m est égal à 2 dans ce cas), il suffit de résoudre l'équation $L_m=4y^3$. Par les Théorèmes 1.1 et 1.2, on voit que $n\leqslant 12$ et le cas n pair est complètement résolu après un coup d'œil rapide à la liste des F_n pour $0\leqslant n\leqslant 12$.

Considérons enfin le cas n impair de (1). L'Éq. (5) implique $q\equiv 1 \pmod 4$, du fait que -1 doit être un résidu quadratique modulo q. Puisque r divise n, il est impair.

Supposons maintenant que $F_n=q^k y^p$ et que q divise n, soit $n=qm$. Alors, par (5), $F_m=q^l z^p$. Si $l=0$, le Théorème 1.1 implique $m=1$, donc $n=q$, ce qui impose $q=5$. Pour $l>0$ nous aboutissons à une situation similaire à la précédente, mais avec $\mathrm{v}_q(m)<\mathrm{v}_q(n)$ et si q divise m on peut répéter le même argument. D'où la seconde affirmation. Si $q=5$ alors $5\mid n$. La « descente » précédente peut continuer jusqu'à $F_5=5$. Comme $F_{25}=5^2\times 3001$, la seule solution est $F_5=5$.

La dernière affirmation est obtenue via un calcul trivial.

Références

[1] C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier, User's guide to PARI-GP, version 2.1.1. Voir aussi http://www.parigp-home.de/.

[2] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, The Magma System I: The User Language, J. Symb. Comp. 24 (1997) 235–265. Voir aussi http://www.maths.usyd.edu.au:8000/u/magma/.

[3] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations, I. Fibonacci and Lucas Perfect Powers, soumis.

[4] J.H.E. Cohn, Lucas and Fibonacci numbers and some Diophantine equations, Proc. Glasgow Math. Assoc. 7 (1965) 24–28.

[5] W. Ivorra, Sur les équations $x^p+2^\beta y^p=z^2$ et $x^p+2^\beta y^p=2z^2$, Acta Arith. 108 (2003) 327–338.

[6] P. Ribenboim, The terms Cx^h, ($h\geqslant 3$) in Lucas sequences: an algorithm and applications to diophantine equations, Acta Arith. 106 (2003) 105–114.